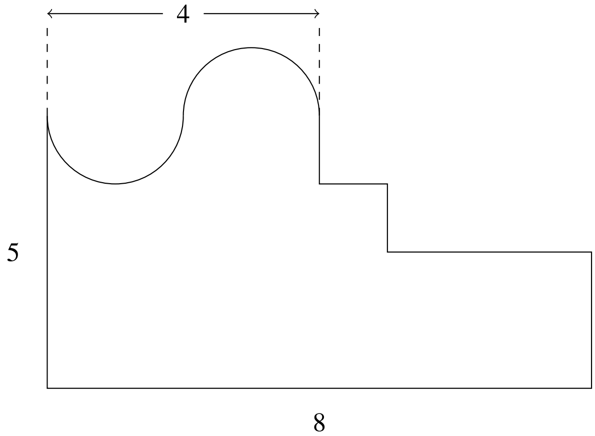
5 Géométrie

5.1 Périmètres

Pour trouver les longueurs de côtés d'une figure, on peut :

- Exploiter une symétrie dans la figure
- Utiliser le théorème de Pythagore
- Utiliser le théorème de Thalès

Exemple :



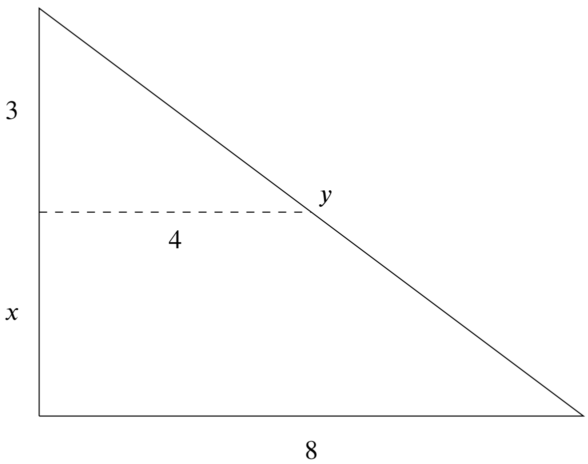
Les deux demi-cercles ont un rayon de 1. Le périmètre de chaque demi-cercle vaut $\pi \cdot 1$.

Pour le reste de la figure, on utilise la symétrie. La longueur totale des segments verticaux vaut $2 \cdot 5$. La longueur totale des segments horizontaux vaut $8+4$.

En tout, le périmètre de la figure vaut :

$$2\pi + 10 + 12 = 22 + 2\pi$$

Exemple :



Par le théorème de Thalès, $\frac{3+x}{8} = \frac{3}{4}$, donc $x = 3$.

Le côté de longueur y est l'hypoténuse du grand triangle. Par le théorème de Pythagore, on a

$$y^2 = 8^2 + 6^2 \;\Rightarrow\; y^2 = 100$$

Donc $y = 10$.

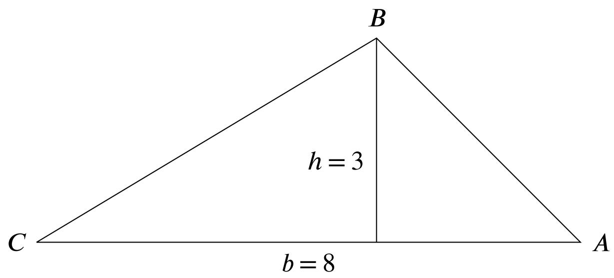
Donc le périmètre vaut $6 + 8 + 10 = 24$

Remarque : Parfois, il peut être pertinent d'ajouter des segments à une figure afin de faire apparaitre des triangles. En particulier, tout polygone peut être décomposé en un nombre fini de triangles.

5.2 Aires de triangles

Théorème 5.1 *L'aire d'un triangle se calcule avec la formule* $\dfrac{\text{base} \cdot \text{hauteur}}{2}$

Exemple :

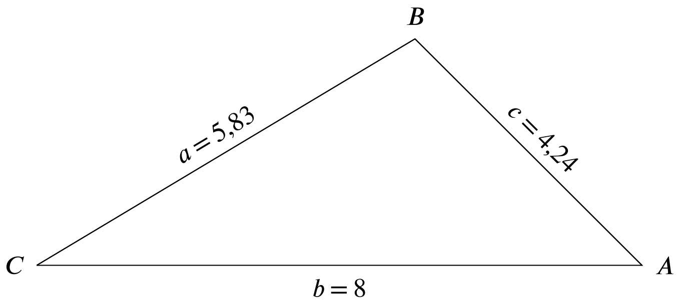


Donc l'aire vaut $\dfrac{8 \cdot 3}{2} = 12$

Théorème 5.2 (Formule de Héron) *Soit T un triangle dont les côtés sont de longueurs a, b et c. Alors l'aire de T vaut*

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{où} \qquad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Exemple :



$$p = \frac{5{,}83 + 4{,}24 + 8}{2} \cong 9{,}04$$

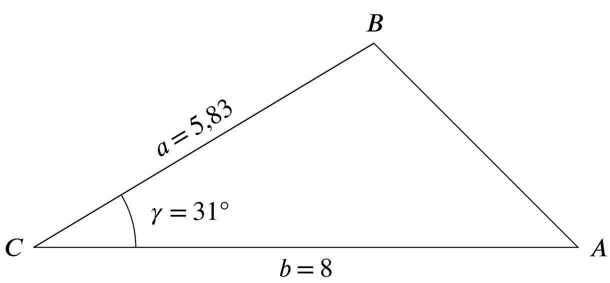
Donc l'aire vaut

$$\sqrt{9{,}04(9{,}04-5{,}83)(9{,}04-4{,}24)(9{,}04-8)} \cong 12$$

Théorème 5.3 (de l'aire) *Soit ABC un triangle tel que les côtés a et b sont adjacents au sommet C. Soit γ l'angle en C. Alors l'aire du triangle ABC vaut*

$$\frac{1}{2} ab \sin(\gamma)$$

Exemple :



Donc l'aire vaut

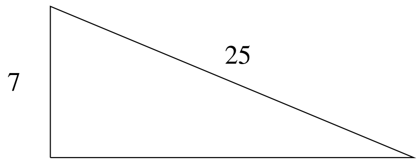
$$\frac{1}{2} \cdot 5{,}83 \cdot 8 \cdot \sin(31) \cong 12$$

5.3 Aires de figures variées

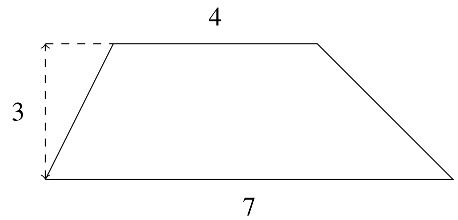
Théorème 5.4 *Tous les polygones peuvent se décomposer en un nombre fini de triangles. On peut alors additionner l'aire de chaque triangle pour obtenir celle du polygone.*

Exemple : Calculer les aires des figures suivantes.

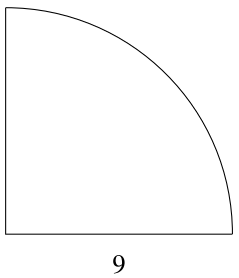
a)



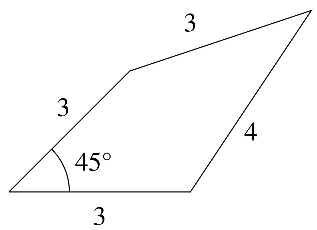
c)



b)



d)

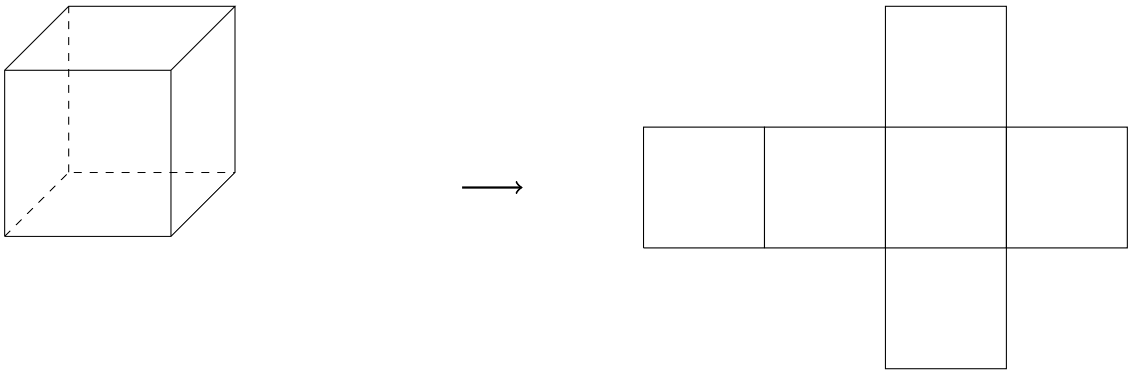


5.4 Solides

5.4.1 Développements de solides

Définition 5.1 Tout polyèdre peut être représenté par un schéma en deux dimensions, appelé **développement du solide**. Un développement s'obtient en « dépliant » les faces du polyèdre.

Exemple :



5.4.2 Volumes de solides

Théorème 5.5 *Volume d'un prisme ou d'un cylindre :*

$$\textit{Volume} = \textit{Aire de la base} \cdot \textit{Hauteur}$$

Volume d'un cône ou d'une pyramide :

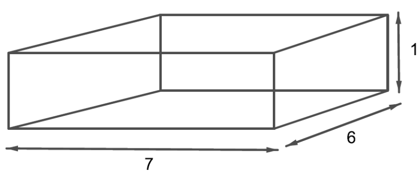
$$\textit{Volume} = \frac{\textit{Aire de la base} \cdot \textit{Hauteur}}{3}$$

Volume d'une sphère :

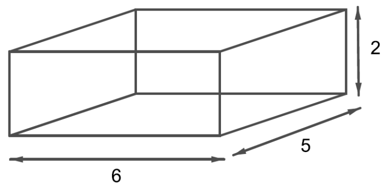
$$\textit{Volume} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Exemple : Calculer les volumes des solides suivants. Les mesures indiquées sont en centimètres.

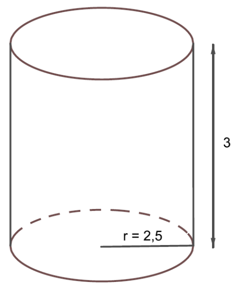
a)



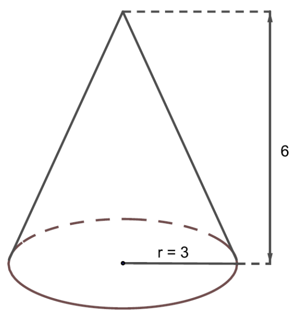
b)



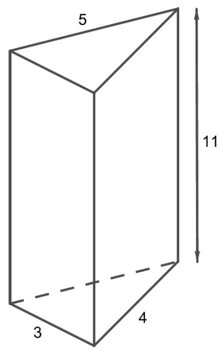
c)



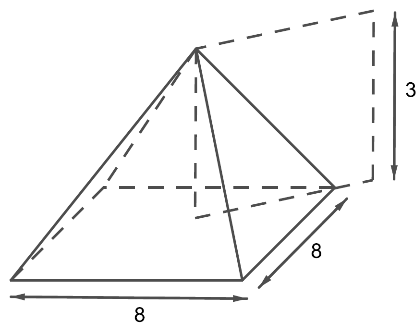
d)



e)



f)



c) Expliquer ce que signifie un seuil de signification de $0,05$ dans le contexte du problème.

Exercice 4.34 Afin d'améliorer le service à la clientèle, une entreprise a informatisé la gestion des stocks. Avant l'informatisation, le temps nécessaire pour répondre à la demande d'un client suivait une loi normale dont la moyenne était de $8,3$ minutes et l'écart type de $3,2$ minutes. À la suite de l'informatisation, un échantillon aléatoire de 25 clients a donné les temps de service suivants, en minutes :

7 9 6 6 3 6 5 7 7 8 10 9 4 3 6 5 7 8 8 3 4 4 6 5 4

Peut-on en conclure, au seuil de signification de 1% que l'informatisation a permis d'accélérer le service à la clientèle ?

Exercice 4.35 La durée de vie moyenne des tubes fluorescents fabriqués par une entreprise est estimée à 1000 heures. Les techniciens tentent d'améliorer la durée de vie en modifiant la composition du gaz. Un test préliminaire montre que, pour un échantillon de 100 tubes, fluorescents modifiés, la durée de vie moyenne est de 1050 heures.

a) Si l'écart-type corrigé de l'échantillon est de 168 heures, au seuil de signification de $0,01$, peut-on en conclure que les néons modifiés durent plus longtemps ?

b) Estimer les risques que la durée de vie moyenne des tubes fluorescents soit toujours de 1000 heures, et donc que la modification du gaz n'a eu aucun effet.

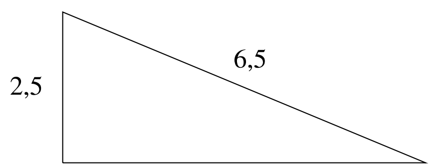
c) La conclusion serait-elle la même si la moyenne de l'échantillon était de 1025 heures ?
Peut-on conclure que cela prouve que la durée de vie moyenne réelle des tubes fluorescents produits est bien de 1000 heures ?

6.5 Géométrie

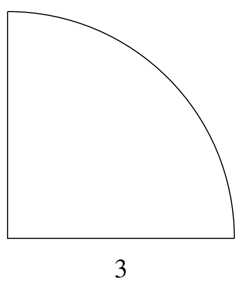
Périmètres

Exercice 5.1 Calculer les périmètres des figures suivantes.

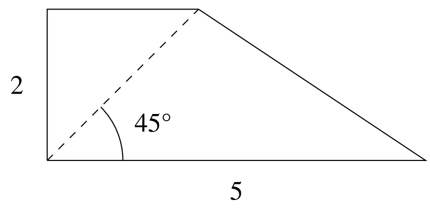
a)



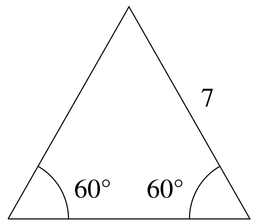
b)



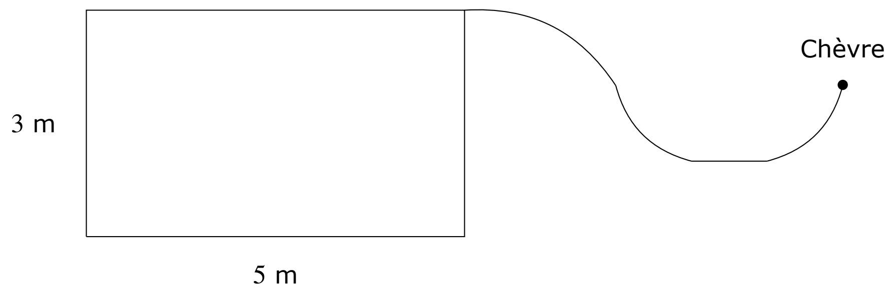
c)



d)



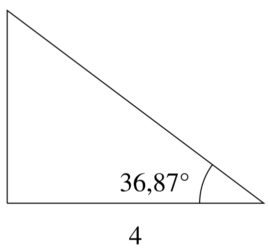
Exercice 5.2 Une chèvre est attachée au coin d'un garage par une corde de 7 mètres de long, comme illustré ci-dessous.



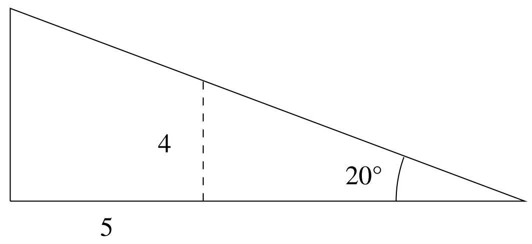
Déterminer la longueur totale du périmètre de la zone dans laquelle la chèvre peut se déplacer autour du garage.

Exercice 5.3 Un bateau fait le tour d'une ile en gardant constamment une distance de 50 mètres avec le bord de l'ile. Sachant que l'ile est un rectangle de 100 mètres sur 42, déterminer la distance parcourue par le bateau pour faire un tour complet de l'ile.

Exercice 5.4 Calculer le périmètre du triangle suivant.



Exercice 5.5 Calculer le périmètre du triangle suivant.



Aires de triangles

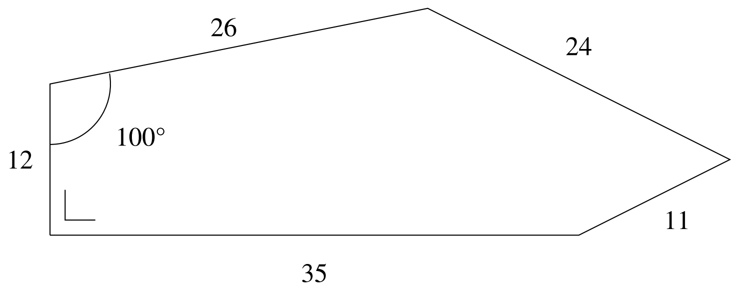
Exercice 5.6 Calculer l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent 7 cm, 11 cm et 8 cm.

Exercice 5.7 Calculer l'aire d'un triangle ABC rectangle en A sachant que $a=13$ et $b=5$.

Exercice 5.8 Calculer l'aire d'un triangle ABC sachant que $a=4$, $b=5$ et $\alpha=42°$.

Aires de figures variées

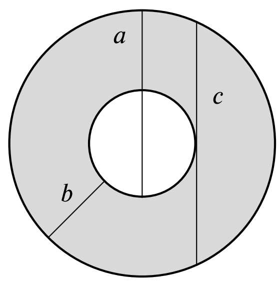
Exercice 5.9 Calculer l'aire de la figure suivante.



Exercice 5.10 Calculer l'aire d'un hexagone régulier dont tous les côtés mesurent 7 cm.

Exercice 5.11 Sachant que l'aire d'un triangle équilatéral vaut 42, déterminer la longueur de chaque côté du triangle.

Exercice 5.12 On considère la figure suivante.

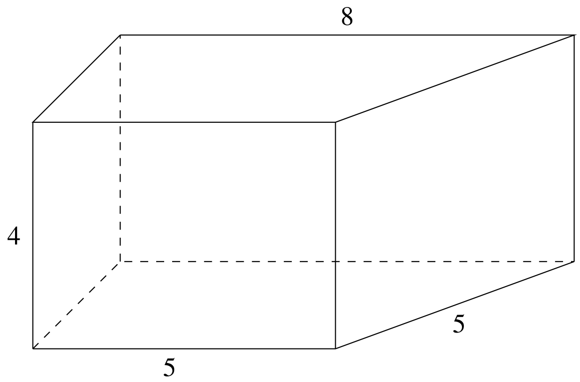


Montrer que l'aire de la zone grisée vaut $a \cdot b \cdot \pi$, puis montrer que $a \cdot b \cdot \pi = \dfrac{\pi \cdot c^2}{4}$

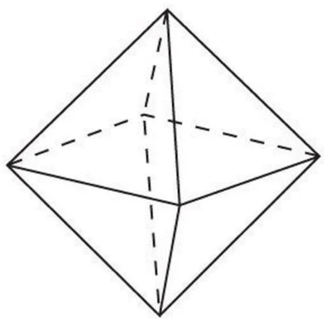
Développements de solides

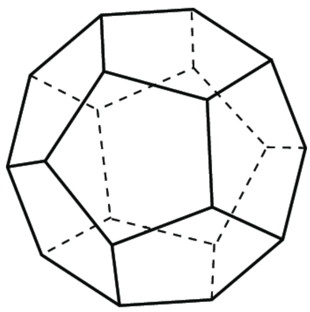
Exercice 5.13 Trouver trois développements du cube différents de celui de l'exemple de la page 27.

Exercice 5.14 Donner un développement du prisme droit suivant, dont les mesures sont en centimètres.



Exercice 5.15 Donner des développements de l'octahèdre régulier, et du dodécahèdre régulier.





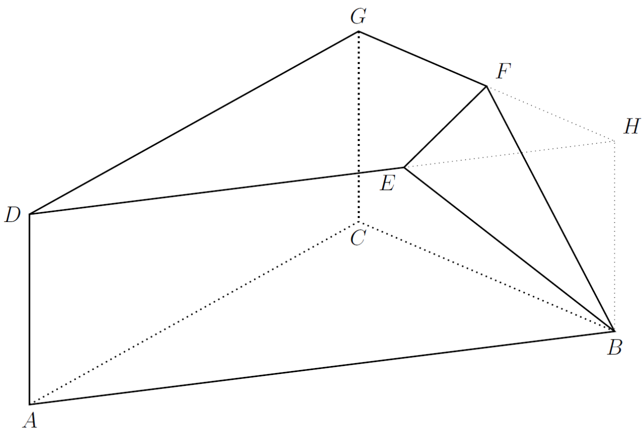
Exercice 5.16 Donner un développement d'un cylindre de rayon 2 cm et de hauteur 3 cm.

Volumes de solides

Exercice 5.17 On verse 3 litres d'eau dans un cylindre de rayon 10 cm et de hauteur 12 cm.
L'eau débordera-t-elle ? Sinon, à quelle hauteur arrivera-t-elle ?

Exercice 5.18 On pose une demi-sphère de rayon x cm sur un cylindre de rayon x cm et de hauteur x cm. Sachant que le volume total est de $127{,}7$ cm^3, déterminer la valeur de x.

Exercice 5.19 $ABCDHG$ est un prisme droit de hauteur 2 cm. La base ABC est un triangle rectangle en C, avec $\overline{AB} = 5$ et $\overline{AC} = 4$.



a) Calculer la longueur $\overline{BC}$.

b) Calculer le volume du prisme $ABCDHG$.

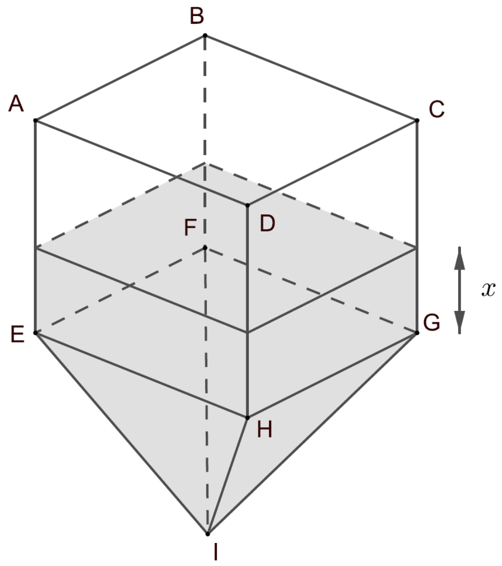
c) On retire la pyramide $EFBH$ pour obtenir le solide $ABCDEFG$. On sait que $\overline{FH} = 1{,}5$ cm et que $\overline{EH} = 2$ cm. Calculer les longueurs des côtés du triangle BEF.

d) Calculer le volume du solide $ABCDEFG$.

Exercice 5.20 Un réservoir est constitué d'une pyramide régulière à base carrée surmontée d'un parallélépipède rectangle.

On a : $\overline{AB} = \overline{BC} = 2$ m, $\overline{AE} = 5$ m, $\overline{OI} = 1{,}5$ m (OI est la hauteur de la pyramide).

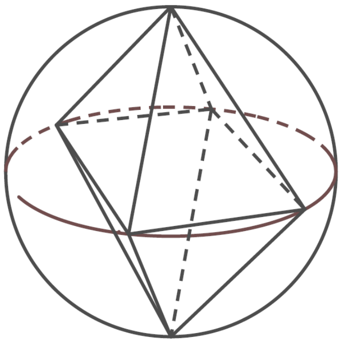
On verse de l'eau dans ce réservoir.



a) Calculer le volume du réservoir lorsqu'il est plein.

b) Pour quelle valeur de x le réservoir est-il plein au tiers ?

Exercice 5.21 Calculer le volume de l'octaèdre régulier inscrit dans une sphère de rayon 10 cm.



4.35

a) $H_0 : \mu = 1000$ h $H_1 : \mu > 1000$ h $c = 1039,1$ h.

On rejette H_0. La durée de vie moyenne des néons modifiés est supérieure à 1000 h.

b) Il y a moins de 1% de chance d'obtenir une moyenne échantillonnale de 1050 heures si la moyenne de la population est de 1000 heures.

La probabilité est tellement faible (en fait, $P(\bar{X} \geq 1050) = P(Z \geq 2.98) = 0,14\%$) qu'on décide de rejeter H_0 en espérant qu'une telle situation ne se soit pas produite.

Le risque de se tromper en décidant de rejeter H_0 est d'au plus 1% (en fait $0,14\%$)

c) Non, on ne rejetterait pas H_0.

Non, cela signifie simplement que l'écart entre $\bar{x}$ et μ n'est pas statistiquement significatif pour permettre de rejeter H_0. Il faudrait étudier la totalité de la population pour prouver que la moyenne vaut exactement 1000 heures, ce qui n'est évidemment pas faisable !

7.5 Solutions - Géométrie

5.1 a) 15 b) $6 + \frac{3\pi}{2}$ c) $9 + \sqrt{13}$ d) 21

5.2 $\frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 7 + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 4 = \frac{21}{2}\pi + \pi + 2\pi = \frac{27\pi}{2} \cong 42{,}4115$ mètres

---

5.3 $2 \cdot 100 + 2 \cdot 42 + 2 \cdot \pi \cdot 50 = 284 + 100\pi \cong 598$ mètres

---

5.4 12

5.5 Environ $29{,}26$

5.6 $p = \frac{7+11+8}{2} = 13 \Rightarrow \sqrt{13(13-7)(13-11)(13-8)} \cong 27{,}93$ cm.

5.7 $c^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow c = 12$, donc l'aire vaut $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$

5.8 On utilise le théorème du sinus : $\frac{4}{\sin(42)} = \frac{5}{\sin(\beta)} \Rightarrow \beta \cong 56{,}76°$. On en déduit que $\gamma = 81{,}24°$.

On peut alors appliquer le théorème de l'aire : $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin(81{,}24) \cong 9{,}88$.

5.9 Environ 544

5.10 Environ $127{,}31$ cm^2

5.11 Soit x le côté du triangle équilatéral. Par le théorème de Pythagore, l'aire du triangle vaut $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2 = 42$. Donc $x \cong 9{,}85$.

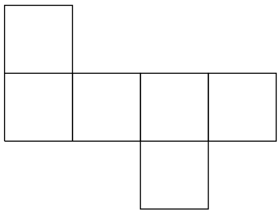
5.12 Le diamètre du cercle intérieur vaut $a-b$, et son aire vaut $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{a^2-2ab+b^2}{4} \cdot \pi$

Le diamètre du cercle extérieur vaut $a+b$, et son aire vaut $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \cdot \pi$

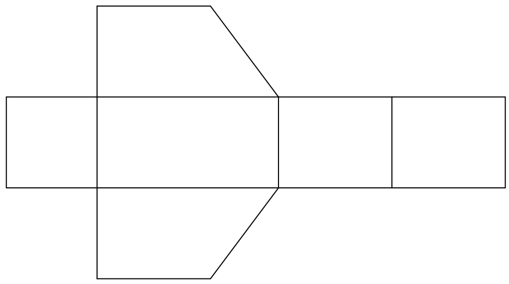
L'aire grisée vaut $\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \cdot \pi - \frac{a^2-2ab+b^2}{4} \cdot \pi = \frac{4ab}{4} \cdot \pi = a \cdot b \cdot \pi$

Pour montrer que $a \cdot b \cdot \pi = \frac{\pi \cdot c^2}{4}$, il faut remarquer que $c^2 + (a-b)^2 = (a+b)^2$, ce qui implique que $c^2 = 4ab$.

5.13

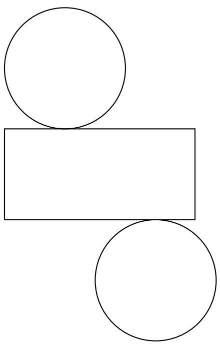


5.14



5.15

5.16



5.17 L'eau arrivera à $9{,}55$ cm

5.18 $x \cong 2{,}9$ cm.

5.19
a) $\overline{BC} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm
b) $V = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 12$ cm^3
c) $\overline{BE} \cong 2{,}83$ cm $\overline{BF} = 2{,}5$ cm $\overline{EF} \cong 1{,}63$ cm
d) $V' = 12 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot 1{,}5 = 11$ cm^3

5.20 a) 22 m^3 b) $1{,}3$ m

5.21 $200\sqrt{12} \cong 692{,}96$ cm^3

Références

[1] H. Bovet : Diplôme 3D. CH-1608 Oron-le-Châtel, 2008.

[2] S. Comtesse : 3c - chapitre 4 - géométrie de l'espace. Gymnase d'Yverdon, 2023.

[3] J.-P. Favre : Mathématiques pour la Matu pro. Promath Editions, 2019.

[4] J.-P. Javet : Mathématiques 3C. http://www.javmath.ch, 2021.

[5] C. Mermoud : Statistiques descriptives. Gymnase de Burier, Juin 2015.

[6] C. Mermoud et F. Ferrez : Statistiques inférentielles. Gymnase de Burier, 2018.

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce document contient certainement quelques erreurs. Merci de participer à son amélioration en envoyant un mail à :

cedric.delmonico@eduvaud.ch

sarah.delmonico@eduvaud.ch

Version du 11 décembre 2023