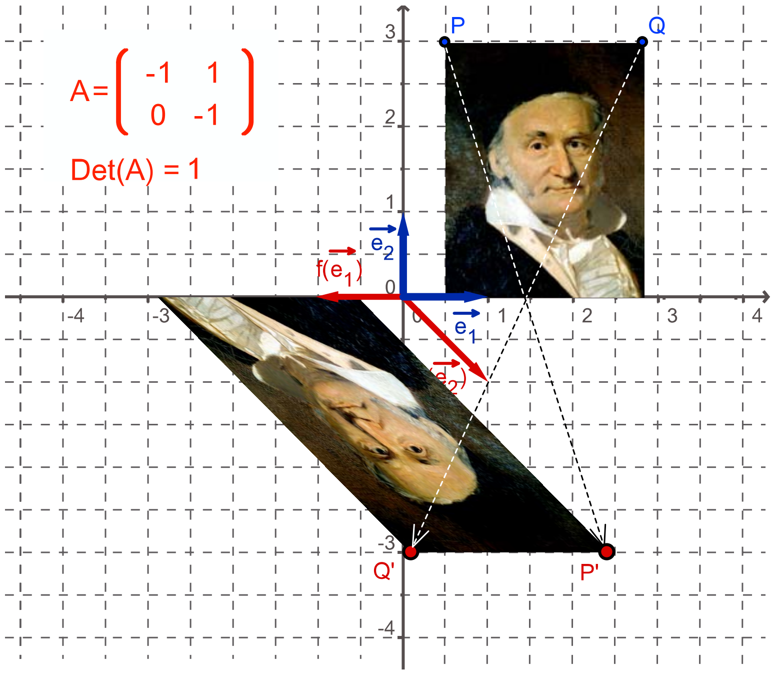
Algèbre linéaire

3M$_{renf}$

Jean-Philippe Javet



http://www.javmath.ch

Version : 2022

Chapitre 1: Calculs matriciels

1.1 Définitions de base

Introduction : *Une matrice est un tableau rectangulaire formé de nombres réels. Grâce aux matrices, on peut par exemple codifier dans un même objet toute l'information d'un système d'équations.*
Nous verrons dans ce chapitre comment effectuer des opérations sur ces matrices. Nous verrons ensuite comment l'écriture matricielle permet de mieux appréhender l'étude d'un système d'équations. Nous en présenterons trois méthodes de résolution :
- *la méthode de Gauss-Jordan ;*
- *en utilisant la matrice inverse ;*
- *la méthode de Cramer.*

Définitions :
- Une matrice $A = (a_{ij})$ de type $m \times n$ est un tableau rectangulaire comprenant m lignes et n colonnes formées de nombres réels.
- L'élément situé au croisement de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne est noté a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemples :
- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est du type ...., $a_{12} = \dots$
- La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est du type ...., $b_{23} = \dots$

Notation : Par convention, les matrices se notent par des lettres majuscules en italique.

Exercice 1.1 : Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1/5 & 1 & 8 \\ 9 & 10 & 1/2 \end{pmatrix}$

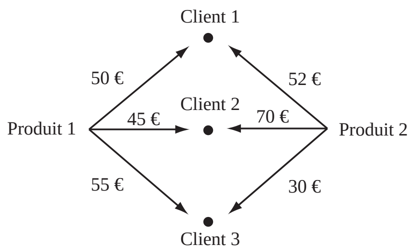
a) Préciser le type de la matrice B
b) Que valent b_{21}, b_{43} et b_{34} ?
c) Dans cette matrice, comment note-t-on le nombre 10 ? le nombre 8 ?

Exercice 1.2 : Écrire la matrice $C = (c_{ij})_{3\times 3}$ où $c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot (2^i) \cdot (j)$

Définitions :

- Une matrice de type $n \times n$ est dite **carrée** d'ordre n
- Dans une matrice carrée, la diagonale formée par les éléments a_{ii} s'appelle la **diagonale principale**.
- Une matrice de type $1 \times n$ est appelée **matrice ligne**.
- Une matrice de type $n \times 1$ est appelée **matrice colonne**.
- Une matrice carrée de type $n \times n$ est appelée **matrice identité** si $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 1$. On la note I_n
- Une matrice de type $m \times n$ composée uniquement de zéro est appelée **matrice nulle**. On la note $0_{m \times n}$

Exercice 1.3 : Un fabricant de composants électroniques vend deux produits différents à trois clients. Les deux produits sont fabriqués dans des usines différentes. Les coûts de transports de chaque produit, pour chaque client, sont indiqués dans le schéma suivant :



a) Présenter les informations contenues dans le schéma sous la forme d'une matrice 2×3
b) Quelle information la deuxième ligne de la matrice contient-elle ?
c) Quelle information la troisième colonne de la matrice contient-elle ?
d) Quelle information a_{12} donne-t-il ?

Exercice 1.4 : Une entreprise compte 524 employés: 1 président, 3 vice-présidents, 20 cadres intermédiaires et 500 syndiqués. Leurs salaires annuels de base sont les suivants: le président reçoit 500'000 €, chaque vice-président, 200'000 €, chaque cadre intermédiaire, 100'000 € et chaque syndiqué, 40'000 €. En plus de leur salaire de base, les employés reçoivent une prime annuelle et des actions de la compagnie. La prime annuelle correspond à 10% du salaire de base, et chaque employé reçoit une action par tranche de 1'000 € de salaire. La valeur d'une action est de 5 €. Construisez la matrice de la rémunération des employés de l'entreprise de manière que les lignes représentent les catégories d'emploi et les colonnes, les différentes modalités de rémunération (dans l'ordre où ces données ont été présentées).

Exercice 1.5 : On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix} 1 & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & \frac{3}{4} & 3 \end{pmatrix}$$

a) Donner le type des 4 premières matrices.

b) Si possible, donner la valeur de chacun des éléments suivants : a_{53} ; a_{35} ;b_{23} ;b_{11} ;c_{22} ;d_{12} ;e_{31} ;e_{13} ;h_{16}

c) Lesquelles des matrices sont :
des matrices carrées ? Des matrices lignes ?
Des matrices colonnes ? Des matrices identités.

Exercice 1.6 : Au cours du dernier mois, trois revendeurs de service interurbain se sont livré une concurrence féroce. Ces trois entreprises détiennent la totalité du marché. L'entreprise 1 a conservé 80% de sa clientèle, mais en a perdu 10% au profit de l'entreprise 2. L'entreprise 2 a retenu 75% de sa clientèle, mais en a perdu 5% au profit de l'entreprise 3. Enfin, l'entreprise 3 détient toujours 90% de sa clientèle, mais elle en a perdu 5% au profit de l'entreprise 2. La matrice de transition $T=\left(t_{ij}\right)_{3\times 3}$, qui représente les mouvements de la clientèle, est définie par

$$t_{ij} = \text{part de la clientèle de } j \text{ qui passe à } i$$

Construisez la matrice de transition du marché de l'interurbain.

1.2 Somme de deux matrices et produit d'une matrice par un scalaire

Définition : Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de même type, leur somme $A + B$ est la matrice de même type obtenue en additionnant les tableaux élément par élément :

$$A + B = (c_{ij}) \text{ , avec } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

Définition : Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de type $m \times n$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λA désigne la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de A par le nombre λ:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Exemple : $4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} =$

Exercice 1.7 : **a)** Calculer, si possible, $A + B$ puis $B + A$. Que constatez-vous ?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Calculer, si possible, $\frac{1}{2}(A + B)$ puis $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.
Que constatez-vous ?

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 8 & -9 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Calculer, si possible, $2A + 3B$. Que constatez-vous ?

$$A = \begin{pmatrix} -2/3 & 3 \\ 1/2 & -2/5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriétés : On a alors les propriétés suivantes

1. $A + B = B + A$

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$

3. $A + 0 = A$

4. $A + (-1)A = 0_{m \times n}$

5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

7. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

pour A, B et C des matrices de type $m \times n$ et λ, μ des réels quelconques.

La vérification de ces propriétés est aisée et laissée en exercice.

Exercice 1.8 : Soit A et B deux matrices carrées d'ordre 2. Démontrer les propriétés **1**, **5** et **6** ci-dessus.

1.3 Rappels (??) Symbole de sommation.

Notation : • Σ est la lettre majuscule *sigma* de l'alphabet grec, qui correspond à S, la première lettre du mot « somme ».

• L'expression $\sum_{i=1}^{n} a_i$ signifie « effectuer la somme des a_i en laissant i prendre les valeurs entières de 1 jusqu'à n ».

• La notation Σ est couramment utilisée en mathématique pour abréger l'écriture d'une somme de termes.

Exemples : **a)** Compléter : $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 = \sum$.................

b) Compléter : $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 98 + 100 = \sum$.................

c) Développer : $\sum_{i=4}^{9} (2i + 1)$........................

d) La somme des éléments de la deuxième colonne d'une matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ s'écrit ....

e) alors que la somme des éléments de la troisième ligne s'écrit

....

Exercice 1.9 : **a)** Développer l'expression : $\sum_{i=4}^{7} i^2 + 1$.

b) Écrire 3 + 5 + 7 + ... + 35 au moyen de la notation Σ.

c) Exprimer la somme des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne d'une matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ au moyen de la notation Σ.

1.4 Produit de deux matrices

Définition : • Le produit de deux matrices A et B est défini si le nbre de colonnes de A est égal au nbre de lignes de B.

• Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de type $m \times n$ et
$B = (b_{ij})$ est une matrice de type $n \times p$ alors

le produit $AB = (c_{ij})$ est la matrice de type $m \times p$ définie par :

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}}$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & [c_{ij}] & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [a_{i1}] & \cdots & [a_{ik}] & \cdots & [a_{in}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & [b_{1j}] & \cdots \\ & \cdots & \\ \cdots & [b_{kj}] & \cdots \\ & \cdots & \\ \cdots & [b_{nj}] & \cdots \end{pmatrix}$$

$$C_{m\times p} \qquad = \qquad A_{m\times n} \qquad \cdot \qquad B_{n\times p}$$

Exemples : Calculer

• $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$

• $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} =$

• $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$

Exercice 1.10 : Soit les matrices :

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad H=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Effectuez si possible les opérations suivantes. Si une opération n'est pas définie, donnez-en la raison.

a) BD **b)** $FE - 2A$ **c)** A^2 **d)** E^2
e) $(3) + GH$ **f)** I_3E **g)** CI_3 **h)** AEF

Exercice 1.11 : **a)** Comparer $A(BC)$ avec $(AB)C$.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Comparer $A(B + C)$ avec $AB + AC$.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Calculer AI_n puis I_nA.

$$A = (a_{ij}) \text{ de type } m \times n \quad \text{et} \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriétés : Le produit matriciel vérifie les propriétés suivantes

1. $A(BC) = (AB)C$ avec $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ et $C_{p\times q}$

2. $AI_n = I_mA = A$ avec $A_{m\times n}$ et les matrices identités I_n et I_m

3. $A(B + C) = AB + AC$ avec $A_{m\times n}$ et $B_{n\times p}$, $C_{n\times p}$.

4. $(A + B)\, C = AC + BC$ si $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ et $C_{n\times p}$.

La vérification de ces propriétés est aisée et laissée en exercice.

Exercice 1.12 : Trouver la matrice X qui vérifie $2X + 3(A + B) = CD$ où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.13 : Un auteur de manuels scolaires a écrit un livre d'algèbre, un livre de calcul et un livre de statistiques, codés respectivement 1, 2 et 3. Au début de l'année, les deux entrepôts de l'éditeur renferment 10'000 exemplaires des livres de cet auteur, dont 3'000 copies du manuel de calcul et 1'000 copies du manuel de statistiques. Le premier des deux entrepôts contient 4'000 exemplaires des ouvrages de l'auteur, dont 1'000 copies du manuel d'algèbre et 2'000 copies du manuel de calcul.

a) Écrivez la matrice A de l'inventaire des ouvrages de l'auteur dans les deux entrepôts de l'éditeur. Les éléments de la matrice doivent respecter l'ordre utilisé dans le tableau suivant.

Inventaire des livres de l'auteur

	Algèbre (1)	Calcul (2)	Statistique (3)
Entrepôt 1			
Entrepôt 2			

b) L'éditeur prévoit de vendre au cours de l'année 30% des exemplaires de chaque ouvrage stockés dans chacun des deux entrepôts. Si les prévisions de l'éditeur se réalisent, quelle opération matricielle sur A permet de dresser l'inventaire à la fin de l'année?

c) Si les prévisions de l'éditeur se réalisent, quelle sera la matrice d'inventaire à la fin de l'année ?

d) Quelle matrice V donne la prévision du nombre d'exemplaires de chaque ouvrage vendus pour chaque entrepôt ?

L'éditeur vend les manuels d'algèbre 20 € l'unité, les manuels de calcul 25 € l'unité et les manuels de statistiques 30 € l'unité.

e) Écrivez la matrice des prix $P = \left(p_{ij}\right)_{3\times1}$.

f) Comment doit-on interpréter la matrice $R = VP$?

g) Que vaut la matrice R ?

Exercice 1.14 : Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer AB
b) Quel étrange résultat obtenez-vous ?

Exercice 1.15 : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer AB puis BA
b) Quel étrange résultat obtenez-vous ?

Mise en garde :

- Le produit de deux matrices non nulles peut être nul. *Il faudra en être attentif lors de la résolution d'équations matricielles.*
- Le produit de deux matrices n'est en général pas commutatif. *Les manipulations algébriques de matrices seront délicates.*

Exercice 1.16 : Déterminer 2 matrices carrées A et B d'ordre 2 tels que

a) $AB = BA$ **b)** $AB = -BA$

Exercice 1.17 : Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Exercice 1.18 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.19 : Une diététicienne, qui travaille dans un hôpital, fait préparer trois types de déjeuners pour répondre aux différents besoins alimentaires des patients. Chaque déjeuner contient deux aliments composés de protéines, de fibres et de matières grasses. Les quantités (en grammes) de chacune de ces composantes, par portion de 30 g d'un aliment, sont données par la matrice *A*.

$$\begin{array}{cc} \text{Aliment 1} & \text{Aliment 2} \\ \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 13 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Protéines} \\ \text{Fibres} \\ \text{Gras} \end{array}$$

Chaque déjeuner contient au total 30 g des deux aliments, dans les proportions indiquées par la matrice B.

$$\begin{array}{ccc} \text{Déjeuner 1} & \text{Déjeuner 2} & \text{Déjeuner 3} \end{array}$$
$$B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Aliment 1} \\ \text{Aliment 2} \end{array}$$

a) Interprétez la valeur de a_{21} dans le contexte donné. N'oubliez pas d'indiquer les unités de mesure dans votre réponse.

b) Interprétez la valeur de b_{13} dans le contexte donné. N'oubliez pas d'indiquer les unités de mesure dans votre réponse.

c) Que représente la deuxième colonne de la matrice *A ?*

d) Pouvez-vous interpréter le produit matriciel *BA* ?
Si oui, calculez ce produit et donnez-en le sens.

e) Pouvez-vous interpréter le produit matriciel *AB* ?
Si oui, calculez ce produit et donnez-en le sens.

1.5 Inverse d'une matrice

Définition : Soit *A* est une matrice carrée d'ordre *n*. S'il existe une matrice *B* telle que :

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A,$$

alors *B* est appelée **la matrice inverse de *A*** *(codée A^{-1})*.

Exemple : Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.20 : Retrouver, parmi les matrices proposées, celles qui sont inverses l'une de l'autre.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2/7 & -3/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ -8 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad G=\begin{pmatrix} -7 & 3 & -1 \\ -8 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.21 : Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ n'admet pas de matrice inverse.

Théorème :

- Pour une matrice d'ordre 2, si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad-bc \neq 0$,

  alors A est inversible et $\boxed{A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$.
- La condition $ad-bc \neq 0$ est nécessaire pour que l'inverse de la matrice A existe. Nous y reviendrons plus tard.

Exercice 1.22 : Montrer qu'effectivement, les 2 matrices proposées dans le théorème ci-dessus sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 1.23 : Calculer, si possible, les matrices inverses de :

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -15 \end{pmatrix}$$

1.6 Systèmes d'équations et matrices

Exemple d'introduction :

- Considérons le système d'équations $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

  Toute l'information du système est contenue dans la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ des coefficients de x et de y <u>et</u> dans la matrice des termes indépendants $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Notons encore $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- Résoudre le système revient alors à résoudre l'équation

  $$\boxed{A \cdot X = B}$$

  Dans le cas présent, on peut montrer que la matrice A est inversible et

  $$A^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

  On obtient donc aisément la solution du système par

  $$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  En effet :

Remarquons cependant que cette méthode de résolution ne s'applique que si le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues et si la matrice des coefficients est inversible.

Signalons encore que, même dans ce cas particulier, la méthode de résolution n'est pas très performante du point de vue numérique.

Exercice 1.24 : **a)** On considère le système d'équations $\begin{cases} 3x + 2y = -15 \\ -4x + 3y = 37 \end{cases}$

- Écrire ce système sous la forme d'une équation matricielle.
- Calculer, si possible, la matrice inverse correspondante.
- En déduire la solution de ce système.

Effectuer de même avec les 2 systèmes suivants:

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 3 \\ \frac{4}{3}x - \frac{3}{2}y = -23 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x + 2y = -15 \\ -6x - 4y = 30 \end{cases}$

Exercice 1.25 : On considère le système d'équations écrit sous sa forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que la matrice suivante correspond à la matrice inverse de celle proposée.

$$\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & -10 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & -9 & 10 \end{pmatrix}$$

b) En déduire les solutions de l'équation matricielle.

Définition : Un **système linéaire** de m équations à n inconnues à coefficients réels est un système d'équations du type

$$(I) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont des nombres réels et les x_j les inconnues.

Démarche : Résoudre le système (I) consistera à résoudre l'équation matricielle $AX = B$ où

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$X = (x_i)_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = (b_i)_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

À ce système d'équations, nous associons la matrice suivante, appelée **matrice augmentée** du système

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Le paragraphe suivant décrit certaines opérations sur les lignes d'une matrice. Ces opérations effectuées sur les lignes d'une matrice associée à un système d'équations nous conduiront à une détermination plus facile de l'ensemble des solutions du système.

1.7 Échelonnement d'une matrice

Définitions :

- **Le pivot** d'une ligne d'une matrice est le premier élément non nul de cette ligne
- Une matrice A est dite **échelonnée** si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

  1) Le pivot d'une ligne est toujours situé à droite du pivot de la ligne précédente.

  2) Toutes les lignes nulles de la matrice (c'est-à-dire constituée entièrement de zéro) sont situées sous les lignes qui comptent des éléments non nuls (donc un pivot).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \text{ est un pivot} \\ \leftarrow 2 \text{ est un pivot} \\ \leftarrow 3 \text{ est un pivot} \end{array}$$

cette matrice n'est pas échelonnée contrairement à celle-ci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \text{ est un pivot} \\ \leftarrow 2 \text{ est un pivot} \\ \leftarrow 3 \text{ est un pivot} \end{array}$$

Définition :

- Une matrice A est dite **échelonnée réduite** si elle est échelonnée et si elle possède encore deux nouvelles conditions :

  1) Tous les pivots de la matrice valent 1.

  2) Dans toute colonne qui contient un pivot, tous les éléments autres que le pivot sont nuls.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cette matrice est échelonnée réduite

Exercice 1.26 : Parmi toutes les matrices suivantes, lesquelles sont échelonnées, lesquelles sont échelonnées réduites ?

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&2\\0&0&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ C=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&1&0&2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$D=\left(\begin{array}{cccccc|c}0&1&2&3&2&7&4\\0&0&0&2&5&3&6\\0&0&0&0&4&3&1\\0&0&0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right),\ E=\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&2\end{pmatrix}.$$

Définition : Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice sont de trois types :

(1) Permutation de 2 lignes.

(2) Multiplication d'une ligne par une constante non nulle.

(3) Ajout d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

Théorème : Les opérations élémentaires ne modifient pas l'ensemble de solutions de l'équation matricielle $AX = B$

Preuve : Effectuons le parallèle entre les 3 opérations élémentaires sur les matrices et la résolution du système correspondant.
Pour visualiser mieux ceci, prenons comme exemple le système suivant ainsi que sa matrice augmentée correspondante :

$$\begin{cases}2x+y-z=1\\ x+y+z=6\\ -x-y+z=0\end{cases}\qquad \left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&1\\1&1&1&6\\-1&-1&1&0\end{array}\right)$$

(1) Permutation de 2 lignes.

Il est clair qu'on peut permuter la première et deuxième lignes du système d'équations sans changer l'ensemble solution puisque celui-ci ne dépend nullement de l'ordre des équations. Ainsi,

$$\begin{cases}2x+y-z=1\\ x+y+z=6\\ -x-y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}x+y+z=6\\ 2x+y-z=1\\ -x-y+z=0\end{cases}$$

sont des **systèmes d'équations équivalents,** car ils admettent le même ensemble solution. Matriciellement, ce résultat fournit l'équivalence :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&1\\1&1&1&6\\-1&-1&1&0\end{array}\right)\overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\2&1&-1&1\\-1&-1&1&0\end{array}\right)$$

(2) Multiplication d'une ligne par une constante non nulle.

Si on multiplie une (ou plusieurs) ligne du nouveau système, on ne change pas non plus l'ensemble solution, puisque toute opération effectuée des 2 côtés d'une équation ne modifie en rien la solution

On a donc matriciellement

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \to 2L_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

(3) Ajout d'un multiple d'une ligne à une autre.

Il s'agit donc d'une combinaison linéaire de 2 équations d'un système. Ceci ne modifie pas l'ensemble de solutions du système.

On a donc matriciellement

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \to L_3 + 2L_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

Définition : Appliquer une transformation élémentaire aux lignes d'une matrice revient à multiplier à gauche cette matrice par une matrice que l'on appelle **matrice élémentaire**.

Exemple : On considère la première opération élémentaire suivante :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Déterminer la matrice élémentaire E_1 tel que :

$$E_1 \cdot \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 1.27 : On considère la deuxième opération élémentaire suivante :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \to 2L_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Déterminer la matrice élémentaire E_2 tel que :

$$E_2 \cdot \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 1.28 : On considère la troisième opération élémentaire suivante :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \to L_3 + 2L_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

Déterminer la matrice élémentaire E_3 tel que :

$$E_3 \cdot \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

Exercice 1.29 : On considère l'opération élémentaire suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \quad L_i \to L_i + \alpha L_j$$

Déterminer la matrice élémentaire E correspondante.

En résumé : **(1)** Permuter les lignes i et j d'une matrice A est équivalent à multiplier à gauche la matrice A par la matrice élémentaire E_1

$$E_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} & & & i & & j & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \Large 0 & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & & \vdots & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & \Large 0 & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(2) Multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par le nombre α est équivalent à multiplier à gauche la matrice A par la matrice E_2

$$E_2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & \Large 0 & \\ & & \alpha & & \\ & \Large 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(3) Ajouter α fois la ligne j à la ligne i de A revient à multiplier à gauche la matrice A par la matrice E_3

$$E_3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & j & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & \Large 0 & & \\ & & \ddots & & & \\ & & \alpha & \ddots & & \\ & \Large 0 & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Théorème : • Toute matrice se transforme en une matrice échelonnée (*ou mieux:* échelonnée réduite) par une suite d'opérations élémentaires.

Preuve : *Nous accepterons ce résultat sans une preuve formelle et utilisons-le dans l'exemple suivant :*

Exemple : Échelonnons la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

On transforme successivement A en A' de la manière suivante :

$$A \sim \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & -4 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & -4 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

On a d'abord permuté les deux premières lignes de A. On a ensuite soustrait la première ligne de la dernière, et enfin on a soustrait deux fois la deuxième ligne de la troisième. Et si l'on désire sa forme **échelonnée réduite** A'' :

$$A \sim \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & -4 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -7/2 & 5/2 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A''$$

Exercice 1.30 :

a) Déterminer les 3 matrices E_1, E_2 et E_3 qui ont permis d'effectuer l'échelonnement précédent ($A \to A'$).

b) Déterminer la matrice X tel que $X \cdot A = A'$.

c) Déterminer la matrice Y tel que $Y \cdot A = A''$

Définition : On appelle **rang** d'une matrice A le nombre de lignes non identiquement nulles de la matrice échelonnée associée à A.

- On peut démontrer que le rang d'une matrice A est indépendant de l'échelonnement effectué. Nous admettrons ce fait.

Exemple : **1)** La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est de rang 1 car :

2) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ est de rang 2.

Exercice 1.31 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad = bc$.

Montrer que son rang est inférieur ou égal à 1

Théorème : On considère A une matrice carrée d'ordre n. Alors

$$\text{rang}(A) = n \Leftrightarrow A \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

1.8 Résolution de système par la méthode du pivot (méthode Gauss-Jordan)

Exemple : L'exemple suivant illustre la méthode du pivot lors de la résolution d'un système d'équations linéaires.

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

À l'aide d'opérations élémentaires de lignes, nous échelonnerons et réduirons la matrice augmentée de ce système.

Johann Carl Friedrich Gauss
Mathématicien allemand
(1777 - 1855)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) L_3 \leftrightarrow L_1 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) L_1 \to -L_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \to L_3 - 5L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & -5 \end{array}\right) L_3 \to -\tfrac{1}{20} L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - 4L_3 \\ L_2 \to L_2 - 6L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right)$$

Wilhelm Jordan
géodésien allemand
(1842 – 1899)

Cette dernière matrice nous fournit donc la solution **S = {(-1 ; 1/2 ; 1/4)}**

Exercice 1.32 : Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode du pivot

a) $\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3=1 \\ x_1+3x_2+4x_3=0 \\ x_1+4x_2+3x_3=3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x_1+3x_2=3 \\ x_1-2x_2=5 \\ 3x_1+2x_2=7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3-x_4=4 \\ x_1+x_2-x_3+x_4=-4 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-1 \\ 3x_1-x_2+2x_3=7 \\ 5x_1+3x_2-4x_3=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3+3x_4=4 \\ 3x_1+3x_2+3x_3-3x_4=-9 \end{cases}$

Exercice 1.33 : Résoudre **simultanément** les systèmes $A\cdot X=B_1$, $A\cdot X=B_2$ et $A\cdot X=B_3$ avec

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } B_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.9 Détermination de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot.

Introduction : La méthode du pivot sert également à trouver l'inverse de toute matrice carrée A d'ordre n. Dans ce cas, on augmente la matrice A de la matrice identité d'ordre n et on effectue des opérations élémentaires de lignes pour passer de $(A \mid I_n)$ à $(I_n \mid C)$. Si cette transformation est possible, on obtient une matrice C qui est l'inverse de la matrice A. Observons ceci sur un exemple :

Exemple : Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow -L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \to L_3 - 5L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & 1 & -5 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \to -1/20 L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/20 & 1/4 & 7/20 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - 4L_3 \\ L_2 \to L_2 - 6L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/10 & -1/2 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & -1/20 & 1/4 & 7/20 \end{array}\right)$$

Ainsi donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & -2/5 \\ 3/10 & -1/2 & -1/10 \\ -1/20 & 1/4 & 7/20 \end{pmatrix}$

Question : Mais pourquoi ça marche ??

Exercice 1.34 : Inverser les matrices suivantes en utilisant la méthode du pivot

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 1.35 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) Résoudre l'équation $A \cdot X = B$ par la méthode du pivot.
b) Calculer A^{-1}, puis calculer $A^{-1} \cdot B$. Que constatez-vous ?

1.10 Déterminant d'une matrice.

Introduction : À chaque matrice carrée A est associé un nombre appelé le **déterminant de A**, et désigné par $|A|$. Il ne faudrait pas confondre cette notation avec le symbole indiquant la valeur absolue d'un nombre réel. Pour éviter tout malentendu, on utilise parfois l'expression « det A» à la place de $|A|$. Nous définirons det A en commençant par le cas où A est d'ordre 1, puis en augmentant l'ordre de 1 à la fois. Comme nous le verrons à la fin de ce chapitre, ces définitions surgissent tout naturellement lors de la résolution de systèmes d'équations linéaires.

Définitions :

- Si A est une matrice carrée **d'ordre 1**, $A = (a_{11})$, nous définirons

$$|A| = a_{11}$$

- Si A est une matrice carrée **d'ordre 2**, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, nous définirons :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Exemple : $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$

Exercice 1.36 : Vérifier les identités suivantes en développant chaque déterminant

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ ka+c & kb+d \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+e \\ c & d+f \end{vmatrix}$

Pour faciliter le calcul de déterminants de matrices carrées d'ordre $n > 1$, nous introduisons la terminologie suivante.

Définition : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre $n > 1$.

La **sous-matrice** A_{ij} de A, est une nouvelle matrice, d'ordre $n - 1$, obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.

Exemple :

Matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Sous-matrice

$A_{23} =$

Pour la matrice ci-dessus, il y a huit autres sous-matrices : A_{12}, A_{13}, A_{21},… qui peuvent être obtenues de la même façon.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, calculer $|A_{32}|$.

Exercice 1.37 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, calculer

a) $|A_{12}|$ **b)** $|A_{23}|$

c) $a_{11} \cdot |A_{11}| - a_{12} \cdot |A_{12}| + a_{13} \cdot |A_{13}|$

d) $-a_{12} \cdot |A_{12}| + a_{22} \cdot |A_{22}| - a_{32} \cdot |A_{32}|$ **e)** $a_{22} \cdot |A_{22}|$

Définition : Si A est une matrice carrée d'ordre 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, nous définirons :

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot |A_{1j}| =$$

Remarques :

- Si nous développons A_{11}, A_{12}, A_{13} et en réorganisant les termes, nous obtenons la formule suivante :

  $$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

- Le procédé défini ci-dessus est appelé *développement de $|A|$ suivant les éléments de la première ligne*. En effectuant les calculs, nous montrerons en exercice que $|A|$ *peut être développé de la même façon en utilisant n'importe quelle ligne ou colonne*.

- Il y a un moyen de se rappeler du signe $(-1)^{i+j}$ associé à la sous-matrice A_{ij} en mémorisant le tableau de signes ci-dessous :

  $$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Exemple : Soit $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 4 & 2 & 0\\ -2 & -7 & 5\end{pmatrix}$, calculer $|A|$ de deux manières différentes.

Exercice 1.38 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

a) $A=\begin{pmatrix}2\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ -3 & 2\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 2 & 5\\ -6 & 3 & -1\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}-5 & 4 & 1\\ 3 & -2 & 7\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix}-2 & 5{,}5 & 8\\ -0{,}3 & 8{,}5 & 7\\ 4{,}9 & 6{,}7 & 11\end{pmatrix}$

Exercice 1.39 : Montrer que le développement du déterminant d'une matrice d'ordre 3 suivant la 3ème ligne ou suivant la 2ème colonne nous fournit la même expression.

Formaliser ces 2 calculs à l'aide de $\sum_{\cdots}^{\cdots}\cdots$

La règle de Sarrus : La règle de Sarrus est un *procédé visuel*, qui permet de retenir la formule du calcul des déterminants d'ordre 3.

Calculer $\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 2 & 5\\ -6 & 3 & -1\end{vmatrix}$.

Exercice 1.40 : Appliquer la règle de Sarrus pour calculer $\begin{vmatrix}-5 & 4 & 1\\ 3 & -2 & 7\\ 2 & 0 & 6\end{vmatrix}$

La définition suivante du déterminant d'une matrice d'ordre quelconque n est calquée sur celle utilisée pour le déterminant d'une matrice d'ordre 3.

Définition : **Le déterminant $|A|$ d'une matrice A d'ordre n** est le développement suivant les éléments de la première ligne :

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \left|A_{1j}\right| =$$

Remarques :

- Nous pourrions également démontrer que le calcul du déterminant ne dépend pas du choix de la ligne ou de la colonne selon laquelle il est développé.
- Le tableau de signes ci-dessous permet de visualiser les "$(-1)^{i+j}$"

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- Le choix de la ligne ou de la colonne avant de se lancer dans le calcul doit être dicté par la présence d'un maximum de zéro comme le montre l'exemple ci-dessous :

Exemple : Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Exercice 1.41 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -3 & 13 \\ -17 & -0{,}8 & 5 & 0{,}9 \\ 1{,}1 & 0{,}2 & 10 & -4 \\ 3 & -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.42 : Écrire les déterminants suivants sous la forme $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$ (combinaison linéaire des x, y et z)

a) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 5 & x \\ 0 & -6 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix}$

Exercice 1.43 : Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

Montrer que $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ [1]

Exercice 1.44 : Démontrer l'affirmation suivante :

Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'une matrice carrée A sont nuls, alors $|A| = 0$.

Théorème : Si A est une matrice carrée, alors A est inversible $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

Exercice 1.45 : Déterminer pour quelles valeurs de λ la matrice suivante est inversible puis calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ (produit des a_{ii} pour i = 1 jusqu'à n)

1.11 La règle de Cramer

Introduction : Les déterminants interviennent dans l'étude des solutions de systèmes d'équations linéaires. Par exemple, prenons deux équations linéaires à deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$$

où au moins un coefficient non nul apparaît dans chaque équation. Nous pouvons supposer que $a_{11} \neq 0$, car sinon $a_{12} \neq 0$ et nous pourrions alors considérer y comme la première inconnue à la place de x.
Nous allons utiliser les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice afin d'en obtenir une équivalente admettant $a_{21} = 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \end{array}\right) \quad L_2 \to L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1$$

$$\sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right) \quad L_2 \to \ldots\ldots$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ 0 & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) & (a_{11}k_2 - a_{21}k_1) \end{array}\right)$$

Donc le système donné est équivalent à :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = a_{11}k_2 - a_{21}k_1 \end{cases}$$

qui peut également s'écrire :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix} \end{cases}.$$

Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, nous pouvons résoudre la seconde équation par rapport à y, ce qui donne :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

La valeur de x correspondante peut-être trouvée en substituant y dans la 1ère équation, ce qui conduit à :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$ *(cf. exercice 46)*

Gabriel Cramer (1704-1752) mathématicien suisse

Cela démontre que, *si le déterminant de la matrice des coefficients d'un système de deux équations à deux inconnues n'est pas nul, le système a une solution unique*. Les deux dernières formules donnant x et y en tant que quotients de déterminants constituent la **règle de Cramer** pour deux inconnues.
Il existe un moyen simple pour se souvenir de la règle de Cramer :

Soit $D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients du système ;

- D_x s'obtiendra en remplaçant dans D les coefficients a_{11}, a_{21}, liés à l'inconnue x par les nombres k_1, k_2.
- D_y est obtenue à partir de D en remplaçant les coefficients a_{12}, a_{22}, liés à l'inconnue y par les nombres k_1, k_2.

$$D_x = \begin{pmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad D_y = \begin{pmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{pmatrix}$$

Règle de Cramer : (pour deux inconnues) Si $|D| \neq 0$, la solution (x ; y) du système linéaire est donnée par les formules suivantes :

$$\boxed{x = \frac{|D_x|}{|D|} \quad , \quad y = \frac{|D_y|}{|D|}}$$

Exemple : Résoudre $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$

Exercice 1.46 : Utiliser la règle de Cramer, lorsqu'elle est applicable, pour résoudre les systèmes:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x - 7y = 24 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 9y = 12 \end{cases}$

Exercice 1.47 : Lors de la résolution du système $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$, nous avons montré que $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$. Vérifier que $x = \dfrac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$.

La règle de Cramer peut être étendue aux systèmes de n équations linéaires à n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, où la $i^{\text{ème}}$ équation est de la forme $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = k_i$.

Pour résoudre un tel système, posons D la matrice des coefficients et posons D_{x_j} la matrice obtenue en remplaçant les coefficients de x_j dans D par les nombres $k_1, \ldots, k_n$ qui apparaissent dans la colonne à droite du signe égal dans le système.
Si $|D| \neq 0$, le système a la solution unique suivante.

Règle de Cramer :
(forme généralisée)

$$\boxed{x_1 = \frac{|D_{x_1}|}{|D|}, \quad x_2 = \frac{|D_{x_2}|}{|D|}, \quad \ldots \quad , \quad x_n = \frac{|D_{x_n}|}{|D|}}$$

Exemple : Résoudre $\begin{cases} x - 2z = 3 \\ -y + 3z = 1 \\ 2x + 5z = 0 \end{cases}$

Exercice 1.48 : Utiliser la règle de Cramer, lorsqu'elle est applicable, pour résoudre les systèmes:

a) $\begin{cases} x-2y-3z=-1 \\ 2x+y+z=6 \\ x+3y-2z=13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x+2y-z=-7 \\ x-2y+2z=0 \\ 3y+z=17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y+3z-w=-3 \\ 3x+2y-z+w=13 \\ x-3y+z-2w=-4 \\ -x+y+4z+3w=0 \end{cases}$

Chapitre 2: Espaces vectoriels

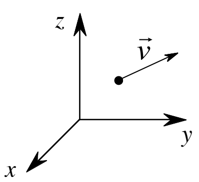
2.1 Introduction et mise en garde

Introduction : Beaucoup de problèmes de mathématique ou de physique vérifient la propriété suivante : si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont deux solutions, alors $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ est aussi une solution, ainsi que : $\alpha \cdot \boldsymbol{u}$, α étant un nombre réel. De tels problèmes sont dits linéaires et ils sont habituellement plus faciles à résoudre que les problèmes plus généraux (appelés "non linéaires" précisément).

En fait, un grand nombre de problèmes provenant de toutes les branches des mathématiques, ainsi que des applications à la physique (équations de la chaleur, cordes vibrantes, …), à la chimie, à l'économie… sont linéaires du moins en première approximation.

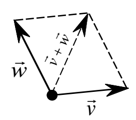
On comprend dès lors l'intérêt qu'il peut y avoir à dégager un cadre mathématique commun à ce type de problèmes, de manière à pouvoir déterminer des méthodes et des algorithmes adaptés. Ce cadre mathématique commun est la notion d'**espace vectoriel**.

Avant de commencer l'étude abstraite, considérons un exemple géométrique qui va nous permettre de visualiser, d'une certaine manière, les propriétés d'un espace vectoriel.



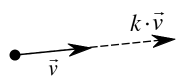
On sait que les physiciens représentent certaines grandeurs par des segments orientés que l'on appelle "vecteurs". Une force, par exemple, n'est pas déterminée uniquement par son intensité, mais aussi par son point d'application et par la direction et le sens suivant lesquels elle s'exerce.

On représente cela par une flèche ayant comme origine le point d'application, de longueur égale à l'intensité de la force et dont le sens et la direction sont ceux de la force.

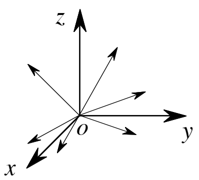


Sur les vecteurs de **même origine**, on peut définir deux opérations :

- l'addition définie par la "règle du parallélogramme" ;

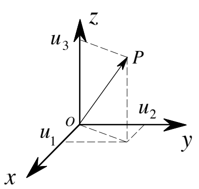


- le produit d'un vecteur par un nombre réel α qui donne un vecteur ayant la même direction de même sens si $\alpha > 0$ et de sens contraire si $\alpha < 0$ et dont la longueur est multipliée par $|\alpha|$.



REMARQUE. --- On n'additionne pas de vecteurs d'origines différentes.

La théorie des espaces vectoriels reflète justement cette situation; aussi si l'on veut avoir une visualisation géométrique du problème, il faudra considérer toujours uniquement des vecteurs ayant **tous la même origine *O***. Ainsi, les vecteurs que nous considérerons peuvent être visualisés comme des "flèches" d'origine O.



Pour pouvoir faire des calculs, on part de l'observation suivante : à un point P du plan - ou de l'espace - est associé un vecteur et un seul (celui qui a P comme extrémité). Ainsi les vecteurs du plan peuvent être mis en correspondance avec les coordonnées de P, c'est-à-dire avec les couples $(u_1 ; u_2) \in \mathbb{R}^2$. D'une manière analogue, les vecteurs de l'espace sont en correspondance avec les triplets $(u_1 ; u_2 ; u_3) \in \mathbb{R}^3$.

Soit les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, ainsi que les deux opérations:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot u_1 \\ \alpha \cdot u_2 \\ \alpha \cdot u_3 \end{pmatrix}$$

À l'aide de ces 2 opérations, on peut vérifier les propriétés suivantes

A) L'addition est commutative et associative, c'est-à-dire:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w}$$

B) Il existe un vecteur noté $\vec{0}$ tel que $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ pour tout vecteur $\vec{u}$.

C) Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un vecteur $\vec{v}$ tel $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.

D) Quant au produit par des réels α et β, il vérifie les propriétés suivantes:

- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$
- $1\vec{u} = \vec{u}$

Il y a, bien entendu, beaucoup d'autres propriétés qui sont vérifiées, mais comme nous le verrons, celles que nous venons de signaler constituent justement "le cadre mathématique commun à tous les problèmes linéaires".

En d'autres termes, toutes les propriétés essentielles des problèmes linéaires peuvent être dégagées à partir de ces propriétés.

REMARQUE. L'exemple que l'on vient d'étudier est très utile, car il permet d'avoir présent à l'esprit un modèle géométrique qui peut servir de support à l'intuition. Cependant, il est important de comprendre que cette interprétation, même si elle est suggestive, n'est pas essentielle à la théorie. D'abord parce que nous ne considérerons pas seulement des espaces de "dimension" 2 ou 3 comme $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ mais aussi des espaces de dimension supérieure, comme $\mathbb{R}^n$, ou même infinie. D'une manière approximative on peut dire que la "dimension", dont nous donnerons la définition précise par la suite, est liée au nombre des paramètres qui interviennent dans le problème, nombre qui peut être très grand dans ce cas, l'analogie avec les vecteurs de l'espace ordinaire risque de ne pas être d'un grand secours. Ceci dit, le support géométrique est particulièrement important en algèbre linéaire et, en règle générale, il ne faudra pas se priver d'y faire appel.

Conventions d'écriture : En géométrie vectorielle, nous avons symbolisé les vecteurs par une lettre surmontée d'une flèche (par exemple $\vec{v}$). Cette flèche, permettant de différencier nombre et vecteur, n'aura plus de sens si l'on considère des ensembles non géométriques. Nous laisserons tomber cette flèche et, à la place, les vecteurs seront codés en caractère gras italique (par exemple $\boldsymbol{v}$).

De même, nous n'aurons plus besoin de différencier composantes d'un vecteur et coordonnées d'un point. Nous utiliserons dès lors un codage horizontal pour les composantes d'un vecteur : (par exemple : $\boldsymbol{v} = (0 ; 1 ; 3)$ vecteur de $\mathbb{R}^3$).

2.2 Définition d'un espace vectoriel

Définition : Un **espace vectoriel** $\boldsymbol{V}$ est un ensemble muni de <u>deux</u> opérations :

(a) une opération appelée **addition** définie par :

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \to & V \\ (\boldsymbol{u}\,;\boldsymbol{v}) & \to & \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \end{array}$$

(b) une opération appelée **multiplication scalaire** définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times V & \to & V \\ (\alpha\,;\boldsymbol{v}) & \to & \alpha \cdot \boldsymbol{v} \end{array}$$

Ces deux opérations doivent satisfaire les <u>huit</u> propriétés suivantes :

1. $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

2. $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V, (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

3. Il existe un élément de V noté $\boldsymbol{0}$ tel que $\forall \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$

4. Pour tout élément $\boldsymbol{v}$ de V, il existe un élément noté $-\boldsymbol{v}$ dans V tel que $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$

5. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V, \alpha \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \alpha \cdot \boldsymbol{v} + \alpha \cdot \boldsymbol{w}$

6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall \boldsymbol{v} \in V, (\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{v} = \alpha \cdot \boldsymbol{v} + \beta \cdot \boldsymbol{v}$

7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall \boldsymbol{v} \in V, (\alpha \cdot \beta) \cdot \boldsymbol{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{v})$

8. $\forall \boldsymbol{v} \in V, 1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

***1.** la commutativité*
***2.** l'associativité du +*
***3.** élément neutre de l'addition*
***4.** élément opposé*
***5.** distributivité I*
***6.** distributivité II*
***7.** l'associativité du ·*
***8.** élément neutre pour la multiplication*

Exemples :

- L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel pour les lois d'addition et de multiplication usuelles.

- L'ensemble $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1\,; x_2\,; \dots\,; x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

formé des n-tuples de nombres réels est un espace vectoriel pour les lois définies par :

- l'addition : $(x_1\,; \dots\,; x_n) + (y_1\,; \dots\,; y_n) = (x_1 + y_1\,; \dots\,; x_n + y_n)$
- la multiplication : $\alpha \cdot (x_1\,; x_2\,; \dots\,; x_n) = (\alpha x_1\,; \alpha x_2\,; \dots\,; \alpha x_n)$

- L'ensemble $\mathcal{F}([a\,;b])$ des fonctions réelles définies sur l'intervalle $[a\,;b]$ est un espace vectoriel pour les lois d'addition et de multiplication usuelles des fonctions.

Exemple développé : L'ensemble de tous les binômes $\mathbb{P}_1 = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel pour les lois définies par :

- l'addition : $(ax + b) \mathbf{+} (cx + d) = (a + c)x + (b + d)$
- la multiplication : $\alpha \bullet (ax + b) = \alpha ax + \alpha b$

En effet :

1) La commutativité

2) L'associativité du **+**

3) Elément neutre de l'addition

4) Elément opposé

5) Distributivité I

6) Distributivité II

7) Associativité du •

8) Elément neutre du •

Indications pour les exercices :

- *Démontrer qu'un ensemble muni des opérations indiquées est un espace vectoriel reviendra à vérifier les 8 propriétés à l'image de l'exemple précédent.*

- *Démontrer qu'un ensemble muni des opérations indiquées* ***n'est pas*** *un espace vectoriel reviendra à montrer* ***une contradiction*** *avec l'une des 8 propriétés.*

Exemple: L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des 2 opérations suivantes :

$(x\,;y) \boldsymbol{+} (x'\,;y') = (x + x' + 1\,;y + y' + 1)$ et $k \bullet (x\,;y) = (kx\,;ky)$

est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2.1 : **a)** L'ensemble des matrices $M_{2\times 3}$ muni des opérations habituelles d'addition et de multiplication par un scalaire forme-t-il un espace vectoriel ?

b) Ce résultat se généralise-t-il à l'ensemble des matrices $M_{m\times n}$?

Exercice 2.2 : L'ensemble $\mathbb{P}_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 muni des opérations habituelles sur les polynômes forme-t-il un espace vectoriel ?

Exercice 2.3 : **a)** L'ensemble $V = \{1\}$ muni des deux opérations:

$$1 \boldsymbol{+} 1 = 1 + 1 \quad \text{et} \quad \alpha \bullet 1 = \alpha \cdot 1$$

est-il un espace vectoriel ?

b) Qu'en est-il pour l'ensemble $V' = \{0\}$ muni des 2 opérations:

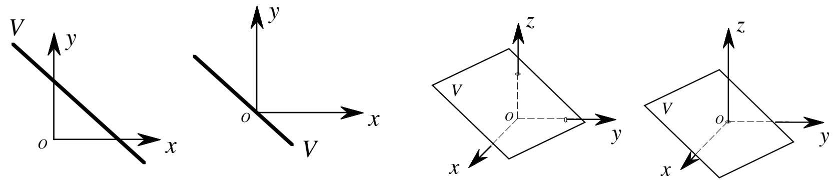
$$0 \boldsymbol{+} 0 = 0 + 0 \quad \text{et} \quad \alpha \bullet 0 = \alpha \cdot 0$$

Exercice 2.4 : Pour quelles raisons l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations suivantes n'est pas un espace vectoriel :

l'addition : $(a\ ;\ b) + (c\ ;\ d) = (a + c\ ;\ b + d)$
la multiplication par un scalaire : $\alpha \cdot (a\ ;\ b) = (\alpha a\ ;\ b)$

Exercice 2.5 : Soit V les ensembles de points de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ représentés ci-dessous. Préciser (en justifiant) dans chaque cas si V est un espace vectoriel.

Dans $\mathbb{R}^2$	Dans $\mathbb{R}^3$
V représentant une droite	V représentant un plan



a) **b)** **c)** **d)**

Exercice 2.6 : Soit T l'ensemble des fonctions de $[0\ ;\ 2\pi]$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = a \cdot \cos(x) + b.$$

Montrer que T, munie de l'addition de fonctions et de la multiplication d'une fonction par un nombre réel est un espace vectoriel.

2.3 Familles génératrices, familles libres et bases

Définition : Soit V un espace vectoriel et $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\ \boldsymbol{v}_k$ une famille de vecteurs de V. Nous dirons qu'un vecteur $\boldsymbol{v}$ de V est **combinaison linéaire** de la famille $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\ \boldsymbol{v}_k$ s'il existe des scalaires $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ tels que

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{v}_i$$

Exercice 2.7 : Exprimer le vecteur (4 ; 3 ; 2) de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v}_1 = (1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et $\boldsymbol{v}_3 = (1\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

Définition : La famille $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\ \boldsymbol{v}_k$ est appelée une **famille génératrice de *V*** si tout vecteur de V peut se représenter comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\ \boldsymbol{v}_k$.

Exemple 1: La famille (1 ; 2), (3 ; 1), (2 ; 1) forme une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2 : Les vecteurs :

$\boldsymbol{e}_1 = (1\ ;\ 0\ ;\ \ldots\ ;\ 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0\ ;\ 1\ ;\ \ldots\ ;\ 0)$, … , $\boldsymbol{e}_n = (0\ ;\ 0\ ;\ \ldots\ ;\ 1)$

forment une famille génératrice de $V = \mathbb{R}^n$.

Exercice 2.8 : Les familles de vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-elles une famille génératrice ?

a) (1 ; 1) et (2 ; 1) **b)** (1 ; 1) et (3 ; 3) **c)** (1 ; 2)
d) (0 ; 0) et (2 ; 3) **e)** (1 ; 1), (0 ; 1) et (1 ; 0)
f) (3 ; 4) et (4 ; 3)

Exercice 2.9 : Même question pour les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$.

a) (1 ; 0 ; 1), (0 ; 1 ; 0) et (1 ; 1 ; 1)
b) (1 ; 0 ; 1) et (2 ; 1 ; 0)
c) (1 ; 0 ; 0), (0 ; 0 ; 0) et (0 ; 0 ; 1)
d) (1 ; 1 ; 1), (2 ; 1 ; 0), (2 ; 0 ; 1) et (0 ; 0 ; 1)
e) (2 ; 3 ; 4), (3 ; 4 ; 5) et (5 ; 7 ; 10)
f) (1 ; 2 ; 0), (0 ; 1 ; 0) et (1 ; 2 ; 3).

Définition : La famille $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ forme une **famille libre** (ou **linéairement indépendante)** si la seule manière d'obtenir $\boldsymbol{0}$ comme combinaison linéaire des $\boldsymbol{v}_i$ est d'imposer à tous les coefficients d'être nuls.

Autrement dit, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ forme une famille libre si la seule solution de l'équation :

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

est la solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Dans le cas contraire, la famille sera dite **liée** (ou **linéairement dépendante**).

Exemple : La famille {(1 ; 0 ; -l), (2 ; 1 ; 2), (3 ; -2 ; 0)} de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ?

Exemple : Qu'en est-il de la famille $\{(1 ; 0 ; -1), (2 ; 1 ; 2), (3 ; 1 ; 1)\}$?

Exemple : $\{x + 1, x^2 + 3x, x^2 + x + 2\}$ est une famille libre dans $\mathbb{P}_2$.
Montrer qu'elle est aussi génératrice.

Exercice 2.10 : Parmi les familles définies dans les deux exercices précédents, lesquelles sont libres ?

Exercice 2.11 : Les 3 affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) Toute famille contenant une famille génératrice est une famille génératrice.
b) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
c) Une famille libre ne contient pas le vecteur nul.

Exercice 2.12 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{P}_2$, montrer que les polynômes suivants sont linéairement dépendants :

$$x^2 + 2x + 3 \quad ; \quad 2x^2 - x - 5 \quad ; \quad 3x^2 + x - 3 \quad ; \quad 2x^2 - x - 4$$

Exercice 2.13 : Dans l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{F}$: $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, on considère les vecteurs :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} \qquad g(x) = \frac{3}{x-1} \qquad h(x) = \frac{-2}{x+1}$$

La famille $\{f\ ;\ g\ ;\ h\}$ est-elle libre ?

Exercice 2.14 : Soit $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ des vecteurs linéairement indépendants dans un espace vectoriel V. Montrer que:
a) $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3$ et $\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$ sont linéairement indépendants.
b) $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3$ et $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$ sont linéairement dépendants.

Exercice 2.15 : Prouver que, dans un espace vectoriel, les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ sont linéairement indépendants si et seulement si les 3 vecteurs $\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2 + \mu\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ le sont ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

Proposition 1 : Soit $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel V.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) La famille $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ est libre,

(2) Chaque vecteur $\boldsymbol{v}$ de V peut s'écrire au plus d'une manière comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v}_i$.
Autrement dit, si $\sum \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum \beta_i \boldsymbol{v}_i$, alors $\alpha_i = \beta_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Preuve:

Exercice 2.16 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{P}_1$ des binômes, on considère les vecteurs suivants :

$$\boldsymbol{p}_1 = 2x + 1 \qquad \boldsymbol{p}_2 = x + 2 \qquad \boldsymbol{p}_3 = 4x + 3$$

a) La famille $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ est-elle génératrice ?
b) La famille $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ est-elle libre ?
c) Exprimer $\boldsymbol{p}_3$ comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{p}_1$ et $\boldsymbol{p}_2$.

Proposition 2 : La famille $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est liée si et seulement si un des vecteurs $\boldsymbol{v}_i$ s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Preuve:

Exercice 2.17 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants :

$$\boldsymbol{v}_1 = (-1\ ;\ 4\ ;\ -4) \qquad \boldsymbol{v}_2 = (3\ ;\ 0\ ;\ 2) \qquad \boldsymbol{v}_3 = (1\ ;\ 2\ ;\ -1)$$

Si la chose est possible, exprimer le vecteur $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ uniquement.

Proposition 3 : Si la famille $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est génératrice et si un des vecteurs $\boldsymbol{v}_i$ est combinaison linéaire des autres vecteurs, alors la famille obtenue à partir de la famille $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ en supprimant ce vecteur reste génératrice.

Preuve:

Exercice 2.18 : Appliquer le théorème précédent à la famille de vecteurs génératrice de $\mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{v}_1 = (-1\ ;\ 2) \qquad \boldsymbol{v}_2 = (0\ ;\ 1) \qquad \boldsymbol{v}_3 = (1\ ;\ 1) \qquad \boldsymbol{v}_4 = (1\ ;\ 3)$$

afin d'en extraire progressivement une famille génératrice libre.

Définition : **Une base** d'un espace vectoriel est une famille génératrice et libre de cet espace vectoriel.

Exemples : **1)** La famille $\boldsymbol{e}_1 = (1\ ;0\ ;0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0\ ;1\ ;0)$ et $\boldsymbol{e}_3 = (0\ ;0\ ;1)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
Elle est appelée la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$.

2) La famille $\{1, x, x^2\}$ forme une base de $\mathbb{P}_2$. Il s'agit même de la base canonique.

3) La famille formée des 4 vecteurs suivants $\boldsymbol{v}_1 = (1 ; 1 ; 0 ; 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0 ; 1 ; 1 ; 0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0 ; 0 ; 1 ; 1)$ et $\boldsymbol{v}_4 = (0 ; 1 ; 0 ; 1)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

4) Proposer une base de $\mathbb{C}$ (avec une justification rapide).

Exercice 2.19 : Soit $\mathbb{P}_4$ l'ensemble des polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à 4. Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ? Génératrices ? Des bases ?

a) $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$
b) $\{1, x-1, x^2+2x+1, x^3\}$
c) $\{2x, x+1, x^2+1, x^2-1\}$
d) $\{x^3, x^2+1, x, x-1, x^4+x+1\}$.

Exercice 2.20 : Soit M_2 l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.

a) Proposer une base naturelle (canonique) de M_2 ?
b) Les familles formées des vecteurs suivants sont-elles des bases ?

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2.21 : Soit les deux vecteurs $\boldsymbol{v}_1 = (1 ; 2 ; 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0 ; 1 ; 3)$ de $\mathbb{R}^3$
a) Montrer que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants.
b) Montrer qu'ils n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$.
c) Déterminer $\boldsymbol{v}_3$ pour que la famille $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ soit une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Théorème **de la base incomplète :**

Toute famille libre $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ de V peut être étendue en une famille génératrice de V.

Théorème **de la base extraite**

Soit $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est une famille génératrice de V.
Cette famille $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ contient alors un sous-ensemble formant une base.

Remarque : Quel que soit le choix de la base considérée dans un espace vectoriel, celles-ci admettront toutes le même nombre de vecteurs.

Définition : Le nombre de vecteurs formant une base de V s'appelle **la dimension de V** et est notée dim V.

Dimension de quelques EV. :

1) La base canonique $\boldsymbol{e}_1 = (1 ; 0 ; \ldots ; 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0 ; 1 ; \ldots ; 0)$, …, $\boldsymbol{e}_n = (0 ; 0 ; \ldots ; 1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ comporte n vecteurs. Cet espace est donc de dimension n.

2) L'espace des matrices carrées M_n admet une base formée de n^2 vecteurs. Il est donc de dimension n^2.

3) L'espace $\mathbb{P}_2$ des polynômes de degré au plus égal à 2 est de dimension 3 car il admet $\{x^2, x, 1\}$ comme base.

Exercice 2.22 : Soit $\mathbb{P}_n = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + \mathrm{a}_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à n.
a) Montrer que $\mathbb{P}_n$ est un espace vectoriel.
b) Exhiber une base de $\mathbb{P}_n$.
Quelle est la dimension de $\mathbb{P}_n$?

Exercice 2.23 : Soit V un espace vectoriel.
On suppose que la famille $\{\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_4\}$ issue de V est libre et que la famille $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_4\}$ est génératrice. Quelle est la dimension de V ? Justifier.

Exercice 2.24 : Soit $\mathcal{F}([a ; b])$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur l'intervalle $[a ; b]$ avec les lois d'addition et de multiplication usuelles des fonctions. Déterminer la dimension de cet EV.

Remarques : Dans un espace vectoriel de dimension n,
a) Toute famille libre de n vecteurs est une base.
b) Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

Exercice 2.25 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère les vecteurs (i.e. nombres) suivants :

$$z_1 : 2 - 3\boldsymbol{i} \qquad z_2 : 4 - \boldsymbol{i} \qquad z_3 : 1 + \boldsymbol{i}$$

a) Exprimer z_3 comme combinaison linéaire de z_1 et z_2.
b) Montrer que z_1 et z_2 forment une base de $\mathbb{C}$.
c) Déterminer $\dim(\mathbb{C})$.

Composantes d'un vecteur dans une base ordonnée : Pour parler de composantes d'un vecteur dans une base, la donnée de l'ensemble de vecteurs de cette base ne suffit pas, nous devons placer ces vecteurs dans un certain ordre. Une **base ordonnée** désignera une base pour laquelle on a choisi un ordre sur ses vecteurs.

Codages :	base non ordonnée :	$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1 ; \dots ; \boldsymbol{e}_n\}$
	base ordonnée :	$\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1 ; \dots ; \boldsymbol{e}_n)$

Soit V un espace vectoriel, $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1 ; \dots ; \boldsymbol{e}_n)$ une base ordonnée de V et $\boldsymbol{v}$ un vecteur de V. Ce vecteur s'écrit de manière unique sous la forme $\boldsymbol{v} = \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i$. Les nombres x_i sont appelés **les composantes** de $\boldsymbol{v}$ dans la base $\mathcal{B}$. La matrice colonne formée par les coefficients x_i se note $\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}}$:

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

2.4 Sous-espaces vectoriels

Définition : Soit V un espace vectoriel. Un sous-ensemble W de V est un sous-espace vectoriel (SEV) si :

(0) $\boldsymbol{0} \in W$

(1) $\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in W, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in W$

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall \boldsymbol{v} \in W, \alpha \cdot \boldsymbol{v} \in W$

Remarque : Un sous-espace vectoriel W de V est en particulier un espace vectoriel pour lequel les lois d'addition et de multiplication par un scalaire sont les restrictions de celles de V.

Exemples :

1. L'espace $\mathbb{P}_2$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{P}_3$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

2. L'ensemble $\{\boldsymbol{0}\}$, les droites passant par l'origine $\{(x_1, y_1) \mid y_1 = kx_1$ avec $x_1 \in \mathbb{R}\}$ pour $k \in \mathbb{R}$ et $\{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{R}^2$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

3. Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{\boldsymbol{0}\}$, les **droites vectorielles** $\Delta = \{k\cdot\boldsymbol{u} \mid k \in \mathbb{R}\}$ passant par l'origine, les **plans vectoriels** $\Pi = \{k\cdot\boldsymbol{u} + m\cdot\boldsymbol{v} \mid k$ et $m \in \mathbb{R}\}$ passant par l'origine et $\mathbb{R}^3$ lui-même.

4. Si W est un sous-espace vectoriel de V de même dimension alors $W = V$.

Exemple 1 à compléter : Montrer que $H = \{(x_1\,;x_2\,;x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\dim(H)$.

Exemple 2 à compléter : L'ensemble $W = \{(x_1\,;x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| = |x_2|\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2.26 : Dans $\mathbb{R}^2$, quelles sont, parmi les parties suivantes, celles qui sont des sous-espaces vectoriels ? Pour ces derniers, en donner la dimension ainsi qu'une base. Représenter graphiquement ces ensembles.

$A = \{(x\ ;0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad B = \{(x\ ;y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
$C = \{(0\ ;0)\}$ $\quad D = \{(0\ ;1)\}$
$E = \{(x\ ;y) \mid 2x + y = 0\}$ $\quad F = \{(x\ ;y) \mid 2x + y = 3\}$
$G = \{(x\ ;2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad H = \{(x\ ;y) \mid x^2 + y^2 \geq 0\}$

Exercice 2.27 : Même question pour les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$.

$A = \{(0\ ;y\ ;0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ $\quad B = \{(1\ ;y\ ;z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$
$C = \{(x\ ;y\ ;x+y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ $\quad D = \{(x\ ;x+1\ ;0) \mid x \in \mathbb{R}\}$
$E = \{(x\ ;y\ ;z) \mid ax + by + cz = 0\}$ $\quad F = \{(x\ ;y\ ;z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Exercice 2.28 : Soit $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4\}$? Justifier et donner des exemples pour les cas jugés admissibles (avec figures).

Exercice 2.29 : Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer la dimension du sous-espace vectoriel engendré par la famille (1 ; 2 ; -1 ; 0), (-3 ; 0 ; -2 ; 4) et (2 ; 10 ; -7 ; 4).
Isoler une base et la prolonger en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2.30 : Déterminer les réels a et b pour que (-2 ; a ; b ; 3) appartienne au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs (1 ; -1 ; 1 ; 2) et (1 ; 2 ; 3 ; 1).

Exercice 2.31 :
a) Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (0 ; 1 ; 0), (1 ; 1 ; 1) et (2 ; 0 ; 1) est $\mathbb{R}^3$ lui-même.

b) Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs (2 ; 1 ; -1), (3 ; 2 ; 1) et (1 ; 0 ; -3).

Exercice 2.32 : Soit $F_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'ensemble des fonctions paires de $F_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel de $F_{\mathbb{R}}$.

b) Qu'en est-il de l'ensemble des fonctions impaires ?

Exercice 2.33 : Soit $\mathcal{F}([a\ ;b])$ l'espace vectoriel des fonctions de $[a\ ;b]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\mathcal{D}([a\ ;b])$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $[a\ ;b]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a\ ;b])$.

Exercice 2.34 : Soit M_2 l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2. Déterminer, parmi les parties suivantes, celles qui sont des sous-espaces vectoriels de M_2. Pour chaque sous-espace vectoriel trouvé, exhiber une base et donner la dimension.

a) L'ensemble des matrices diagonales[1].

b) L'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

c) L'ensemble des matrices symétriques.[2]

2.5 Somme et intersection de sous-espaces vectoriels

Définition : Si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces vectoriels de V, leur somme et intersection sont définies par :

$$V_1 + V_2 = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \text{ , } \boldsymbol{v}_1 \in V_1, \boldsymbol{v}_2 \in V_2\}.$$
$$V_1 \cap V_2 = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} \in V_1 \text{ et } \boldsymbol{v} \in V_2\}.$$

Proposition : L'ensemble $V_1 + V_2$ est un sous-espace vectoriel de V.

Exercice 2.35 : L'ensemble $V_1 \cap V_2$ est un SEV de V

Théorème : Si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de V, alors

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Preuve : *En exercice (qui suit).*

[1] Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls.

[2] Une matrice A est dite **symétrique** si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i et j.

Exercice 2.36 : **Compléter la preuve du théorème précédent :**

Soit $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ une base de $V_1 \cap V_2$. Comme $V_1 \cap V_2$ est contenue dans .... et ...., par prolongement, on obtient des bases de V_1 et V_2 :

$$V_1 : \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r , \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s$$
$$V_2 : \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r , \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_t$$

Montrons que $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r , \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s , \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_t$ est une base de ......

- Cette famille est .... car tout vecteur $\boldsymbol{u}$ de .... s'écrit comme somme d'un vecteur de V_1 et d'un vecteur de V_2, et donc comme .... des $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{w}_j$ et $\boldsymbol{z}_k$:

$$\boldsymbol{u} = \left(\sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i + \sum_j \beta_j \boldsymbol{w}_j\right) + \left(\sum_i \alpha'_i \boldsymbol{v}_i + \sum_k \gamma_k \boldsymbol{z}_k\right) = \sum_i \ldots\ldots\ldots\ldots \boldsymbol{v}_i + \sum_j \beta_j \boldsymbol{w}_j + \sum_k \gamma_k \boldsymbol{z}_k$$

- Cette famille est .... En effet, montrons que :

$$\sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i + \sum_j \beta_j \boldsymbol{w}_j + \sum_k \gamma_k \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \text{les } \alpha_i, \beta_j \text{ et } \gamma_k \text{ tous } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De cette somme, on a $\sum_k \gamma_k \boldsymbol{z}_k =$ .... est à la fois dans V_1 et dans V_2, et appartient donc à ....
Comme $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ est une base de $V_1 \cap V_2$, il existe des nombres δ_i tel que

$$\sum_k \gamma_k \boldsymbol{z}_k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow \sum_k \gamma_k \boldsymbol{z}_k + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

Comme la famille ($\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r , \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_t$) est libre (base de ....), tous les γ_k et tous les δ_i sont .... On a donc

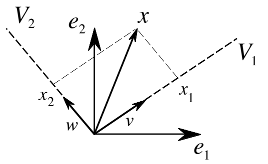
$$\sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i + \sum_j \beta_j \boldsymbol{w}_j = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ceci donne $\beta_j = \alpha_i = 0$, car la famille formée par les .... et les .... est également libre (base de ....).

Comme la dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs formant une de ses bases on a :

$$\begin{aligned} \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) &= (r + s + t) + r \\ &= (\ldots\ldots + \ldots\ldots) + (\ldots\ldots + \ldots\ldots) \\ &= \dim(V_1) + \dim(V_2) \text{ et l'on conclut.} \end{aligned}$$

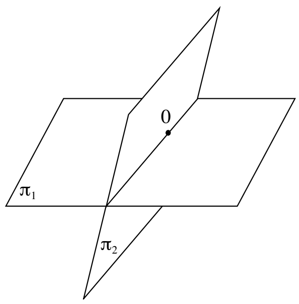
Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ deux vecteurs indépendants.
On considère $V_1 = \{k \cdot \boldsymbol{v} \mid k \in \mathbb{R}\}$ et $V_2 = \{m \cdot \boldsymbol{w} \mid m \in \mathbb{R}\}$ les deux droites vectorielles engendrées par $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$.
On a $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ et $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$



$V_1 \cap V_2 = \{0\}$ car

$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$ car

Exemple 2 : Dans $\mathbb{R}^3$, soit π_1 et π_2 deux plans vectoriels.



On a $\pi_1 \cap \pi_2 = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ et

$\pi_1 + \pi_2 = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

dim $(\pi_1 + \pi_2) = \ldots\ldots$,

dim $(\pi_1) = \ldots\ldots$, dim $(\pi_2) = \ldots\ldots$,

dim $(\pi_1 \cap \pi_2) = \ldots\ldots$

Exercice 2.37 : Déterminer la dimension et une base ordonnée de l'ensemble des solutions de chacun des systèmes :

a) $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \\ 6x + 5y + z = 0 \end{cases}$

Exercice 2.38 : *Vrai ou faux ?*

a) Une famille libre peut contenir le vecteur nul $\boldsymbol{0}$.

b) Si une famille de vecteurs engendre un espace vectoriel V, alors on peut en extraire une base de V.

c) Si la famille $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_5$ est libre, alors sa sous-famille $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3$ l'est aussi.

d) La base canonique ordonnée de $\mathbb{R}^4$ est :
$\{(1 ; 0 ; 0 ; 0), (0 ; 1 ; 0 ; 0), (0 ; 0 ; 1 ; 0), (0 ; 0 ; 0 ; 1)\}$.

Chapitre 3: Applications linéaires

3.1 Introduction et définitions

Introduction : Une application linéaire est une application entre espaces vectoriels qui préserve l'addition des vecteurs et la multiplication par des nombres réels.
Dans ce chapitre nous étudions les propriétés d'une application linéaire et en particulier sa représentation matricielle dans des bases fixées. On vérifiera que le rang de cette matrice est égal à la dimension de l'espace image. La correspondance entre application linéaire et matrice s'avérera très utile pour l'étude du rang ou de l'inversibilité d'une matrice.

Les applications linéaires sont très importantes en géométrie. Les rotations, homothéties, symétries et projections peuvent être considérées comme des composées de translations et d'applications linéaires.

Les applications linéaires vous seront utiles pour l'étude des fonctions de plusieurs variables.

Toute fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'approxime, en un point a, par sa tangente, à laquelle on peut associer l'application linéaire qui à x fait correspondre $f'(a)\cdot x$; de manière similaire, toute fonction différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ peut s'approximer à l'aide de sa différentielle qui est une application linéaire.

Définition : Soit V et W deux espaces vectoriels.
Une **application** $T: V \to W$ est dite **linéaire** si pour tout $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a:

a) $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$
b) $T(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha T(\boldsymbol{u})$

Remarques : **1.** Les deux propriétés exprimant qu'une application entre espaces vectoriels est linéaire peuvent se remplacer par la seule propriété:

$$T(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}) = \alpha T(\boldsymbol{u}) + \beta T(\boldsymbol{v}) \text{ pour } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \text{ et } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. Si T est linéaire, on a :
- $T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ ou plutôt $T(\boldsymbol{0}_V) = \boldsymbol{0}_W$
- $T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\boldsymbol{v}_i)$ car :

Exercice 3.1 : Justifier les 2 propriétés de la 2ème remarque ci-dessus.

Abus d'écriture: Soit $\boldsymbol{v} = (x\,;y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ sur lequel on fait agir une application linéaire T. On se permettra d'écrire alors $T(x\,;y)$ en lieu et place de $T(\boldsymbol{v})$ ou $T\big((x\,;y)\big)$.

Exemples: **1)** L'application $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $T(x\,;y) = 2x + 3y$ est linéaire.

2) Les applications T_1 et $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes ne sont pas linéaires.

$$T_1(x\,;y) = x^2 + y \quad ; \quad T_2(x\,;y) = x + y + 1$$

Exemples: **3)** Une rotation d'un angle θ autour de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Nous expliciterons cette application linéaire plus loin.

4) La symétrie par rapport à l'axe des x est une application linéaire $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant $S(x\ ;\ y) = (x\ ;\ -y)$.

5) La projection sur la droite des x parallèlement à l'axe des y est une application linéaire P de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$P(x\ ;\ y) = (x\ ;\ 0).$$

Exemples développés: **6)** Montrer que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1\ ;\ x_2) \mapsto (x_1 - x_2\ ;\ 5x_1)$ est une application linéaire.

7) Montrer que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x\ ;\ y) = (x + 1\ ;\ y)$ n’est pas une application linéaire.

Exercice 3.2 : Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1 ; x_2) \mapsto (x_1 + x_2 ; x_1)$
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1 ; x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$
c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : T(x_1 ; x_2 ; x_3) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$
d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : T(x ; y) = (x + 1 ; 2y ; x + y)$
e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1 ; x_2) \mapsto (x_1 ; \sin(x_2))$

Exercice 3.3 : Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires.
Montrer que $f + g$ est une application linéaire de E vers F.

Exercice 3.4 : Les applications T, de $\mathcal{D}([a ; b])$ vers $\mathcal{F}([a ; b])$, définie de la façon suivante, sont-elles linéaires ?

a) $T(f) = 2f$ **b)** $T(f) = f'$
c) $T(f) = 2f' - 3f$ **d)** $T(f) = f' - f^2$

Exercice 3.5 : Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire vérifiant :
$T(3 ; 2 ; 1) = (5 ; 4 ; 0)$ et $T(5 ; 4 ; 0) = (3 ; 2 ; 1)$.

a) Exprimer le vecteur $(1 ; 2 ; -3)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $(3 ; 2 ; 1)$ et $(5 ; 4 ; 0)$
b) En déduire $T(1 ; 2 ; -3)$ *en utilisant les propriétés d'application linéaire de T*

Exercice 3.6 : Soient $T : V \to W$ une application linéaire et $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ des vecteurs de V tels que $T(\boldsymbol{v_1}), \ldots, T(\boldsymbol{v_n})$ soient linéairement indépendants dans W. Montrer que $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ sont linéairement indépendants dans V.

Exemple important: Soit A une matrice de type $m \times n$.
Notons $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application définie par $L_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$.
Alors, l'application L_A est une application linéaire, car

Les exemples 1, 4 et 5 ci-dessus sont en fait de ce type et associés respectivement aux matrices

Exemple important: **1)** L'application $L(x\ ;\ y) = 2x + 3y$ est associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4) L'application $S(x\ ;\ y) = (x\ ;\ -y)$ est associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

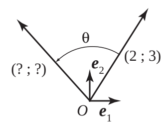
5) L'application $P(x\ ;\ y) = (x\ ;\ 0)$ est associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le paragraphe suivant, nous montrerons comment ***toute application linéaire*** *entre espaces vectoriels de dimensions finies* ***peut être représentée par une matrice***.

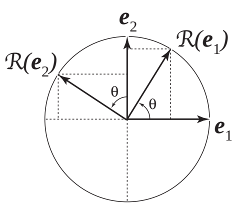
3.2 Matrice associée à une application linéaire

Exemple dans $\mathbb{R}^2$: Commençons par un exemple **important**. On considère le vecteur $\boldsymbol{v} = (2\,;\,3)$. Déterminer l'image de ce vecteur par une rotation de $\frac{5\pi}{12}$ (+75°) autour de l'origine O.



Soit $(\boldsymbol{e}_1\,;\boldsymbol{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère la transformation $\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ correspondant à la rotation d'angle θ autour de l'origine. Déterminons l'image des vecteurs de base par $\mathcal{R}$:

$\mathcal{R}(\boldsymbol{e}_1) = (\cos\theta)\cdot\boldsymbol{e}_1 + (\sin\theta)\cdot\boldsymbol{e}_2$. On définit le <u>1er vecteur colonne</u> : $\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$



$\mathcal{R}(\boldsymbol{e}_2) = (-\sin\theta)\cdot\boldsymbol{e}_1 + (\cos\theta)\cdot\boldsymbol{e}_2$, On définit le <u>2ème vecteur colonne</u> : $\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$

On réunit les 2 vecteurs colonnes en une matrice sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

Cette matrice représentera la transformation linéaire $\mathcal{R}$.

Pour s'en convaincre, recalculons les images des vecteurs de base :

$\boldsymbol{e}_1 = (1\,;\,0)$ alors $\mathcal{R}(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ ce qui correspond bien à $\mathcal{R}(\boldsymbol{e}_1) = (\cos\theta)\cdot\boldsymbol{e}_1 + (\sin\theta)\cdot\boldsymbol{e}_2$

$\boldsymbol{e}_2 = (0\,;\,1)$ alors $\mathcal{R}(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ ce qui correspond bien à $\mathcal{R}(\boldsymbol{e}_2) = (-\sin\theta)\cdot\boldsymbol{e}_1 + (\cos\theta)\cdot\boldsymbol{e}_2$

Appliquons maintenant cette matrice au vecteur $\boldsymbol{v}$ et à l'angle $\theta = \frac{5\pi}{12}$.

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix}\cos(5\pi/12) & -\sin(5\pi/12)\\ \sin(5\pi/12) & \cos(5\pi/12)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cos(5\pi/12) - 3\sin(5\pi/12)\\ 2\sin(5\pi/12) + 3\cos(5\pi/12)\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}(2\,;\,3) \cong (-2{,}38\,;\,2{,}71)$$

et l'application $\mathcal{R}$ s'exprimera de façon plus générale par

$$\mathcal{R}(x\,;\,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta,\, x\sin\theta + y\cos\theta) \quad \text{où} \quad \boldsymbol{v} = (x\,;\,y)$$

Après les exemples et exercices qui suivent, nous reprendrons cette démarche plus généralement.

Exemple : Déterminer la matrice A de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $T(x\,;y\,;z) = (4x - 2y - z\,;3x - 4y + z)$ relativement aux bases canoniques ordonnées de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.7 : Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par :

$$T(x\,;y\,;z) = (4x + 2z\,;2y - z\,;5z - x\,;2y)$$

Quelle est la représentation matricielle de T relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$

Exercice 3.8 : Déterminer les représentations matricielles, dans les bases canoniques, des applications linéaires suivantes :

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x_1\,;x_2\,;x_3) \mapsto (x_1 + x_2\,;2x_3)$
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1\,;x_2) \mapsto (x_1\,;0)$
c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T(x_1\,;x_2) = (2x_1\,;x_2)$
d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : T(x\,;y) = (x\,;y\,;x + y)$
e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$T(x\,;y\,;z) = (x + 2y + 3z\,;4x + 5y + 6z\,;7x + 8y + 9z)$$

Exercice 3.9 :

a) Quelle est la représentation matricielle de l'application identité de $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique ?
b) Quelle est la représentation matricielle de l'application identité de $\mathbb{R}^2$ lorsque $\mathbb{R}^2$ est décrit au départ dans la base canonique et à l'arrivée dans la base $\big((1\,;1), (-1\,;1)\big)$?
c) Quelle est la représentation matricielle de l'application identité de $\mathbb{R}^2$ lorsque $\mathbb{R}^2$ est décrit au départ dans la base $\big((1\,;1), (-1\,;1)\big)$ et à l'arrivée dans la base canonique ?

Exercice 3.10 : Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$T(x\,;y\,;z) = (x + y\,;y - z)$$

a) Quelle est la représentation matricielle de T relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$

b) Quelle est la représentation matricielle de T relativement aux bases suivantes :

Dans $\mathbb{R}^3$: $\big((1\,;1\,;0), (0\,;1\,;0), (1\,;0\,;1)\big)$
Dans $\mathbb{R}^2$: $\big((0\,;1), (1\,;0)\big)$

Démarche générale : Soit V et W deux EV de dimension n et p respectivement.
Soit $e = (\boldsymbol{e}_1\,; \ldots\,; \boldsymbol{e}_n)$ une base ordonnée de V et $f = (\boldsymbol{f}_1\,; \ldots\,;\boldsymbol{f}_p)$ une base ordonnée de W.

Soit encore $T : V \to W$ une application linéaire.

Il existe des nombres définis de manière unique a_{ij} avec $i \in \{1\,;2\,;\ldots\,;n\}$ et $j \in \{1\,;2\,;\ldots\,;p\}$ tels que

$$T(\boldsymbol{e}_1) = a_{11}\cdot \boldsymbol{f}_1 + a_{21}\cdot \boldsymbol{f}_2 + a_{31}\cdot \boldsymbol{f}_3 + \ldots + a_{p1}\cdot \boldsymbol{f}_p = \sum_{j=1}^{p} a_{j1}\cdot \boldsymbol{f}_j$$

$$T(\boldsymbol{e}_2) = a_{12}\cdot \boldsymbol{f}_1 + a_{22}\cdot \boldsymbol{f}_2 + a_{32}\cdot \boldsymbol{f}_3 + \ldots + a_{p2}\cdot \boldsymbol{f}_p = \sum_{j=1}^{p} a_{j2}\cdot \boldsymbol{f}_j$$

$$\ldots\ldots$$

$$T(\boldsymbol{e}_n) = a_{1n}\cdot \boldsymbol{f}_1 + a_{2n}\cdot \boldsymbol{f}_2 + a_{3n}\cdot \boldsymbol{f}_3 + \ldots + a_{pn}\cdot \boldsymbol{f}_p = \sum_{j=1}^{p} a_{jn}\cdot \boldsymbol{f}_j$$

Ainsi donc, on peut représenter cette transformation sous une forme matricielle relativement aux bases choisies dans V et W à l'aide de la matrice ($p\times n$)

$${}_fA_e = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

$j^{\text{ème}}$ colonne:
coefficients de $T(\boldsymbol{e}_j)$
dans la base $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$

Définition : La matrice ${}_fA_e$ de type $p\times n$ s'appelle **la matrice de T relativement aux bases e et f**.

La proposition suivante montre que cette matrice permet de reconstruire l'application linéaire T pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$ de V.

Proposition: Pour $\boldsymbol{v}$ fixé dans V, la matrice colonne des composantes de $T(\boldsymbol{v})$ dans la base f (noté $T(\boldsymbol{v})_f$) est le produit de la matrice ${}_fA_e$ par la matrice colonne des composantes de $\boldsymbol{v}$ dans la base e.

$$T(\boldsymbol{v})_f = {}_fA_e \cdot \boldsymbol{v}_e$$

Preuve :

Calculons $T(\boldsymbol{v})_f$ avec $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i$.

$$T(\boldsymbol{v})_f = \left(T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i\right)\right)_f = x_1T(\boldsymbol{e}_1)_f + x_2T(\boldsymbol{e}_2)_f + \ldots + x_nT(\boldsymbol{e}_n)_f$$

$$= x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {}_fA_e \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

D'où la formule annoncée : $T(\boldsymbol{v})_f = {}_fA_e \cdot \boldsymbol{v}_e$

Exercice 3.11 : Soit V un espace vectoriel de dimension 4 muni de la base $e = (\boldsymbol{e}_1 ; \boldsymbol{e}_2 ; \boldsymbol{e}_3 ; \boldsymbol{e}_4)$. On définit une transformation linéaire L de V en posant :

$$L(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ L(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,\ L(\boldsymbol{e}_3) = 3\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4,\ L(\boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{e}_4.$$

a) Donner la représentation matricielle de L dans la base e

b) Donner la représentation matricielle de L dans la base e au départ et e' à l'arrivée où $e' = (L(\boldsymbol{e}_1), L(\boldsymbol{e}_2), L(\boldsymbol{e}_3), L(\boldsymbol{e}_4))$.

Exercice 3.12 : Soit $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3 : L(x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5) = (x_1 ; x_2 - x_5 ; 3x_4)$

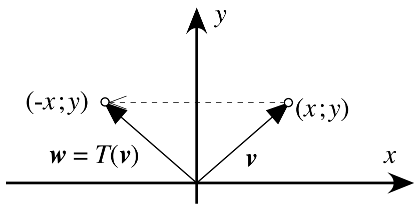
a) Donner la représentation matricielle de L lorsque l'on choisit pour $\mathbb{R}^5$ la base canonique ordonnée e et pour $\mathbb{R}^3$ la base f définie par:

$$f = \big((1 ; 1 ; 0), (0 ; 1 ; 0), (0 ; 1 ; 1)\big)$$

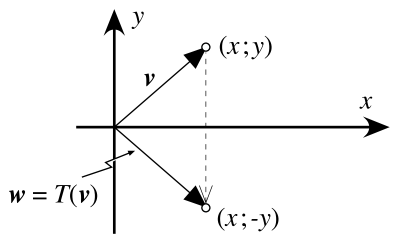
b) Calculer $L(1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5)$ *exprimé dans la base f.*

3.3 Quelques applications T usuelles de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

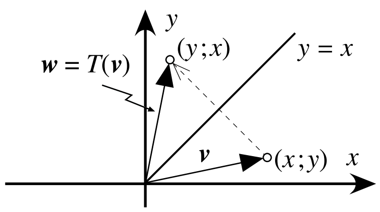
Symétrie orthogonale relativement à l'axe Oy :



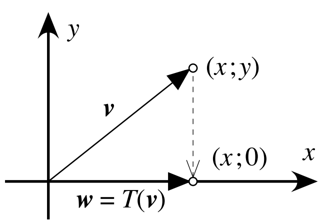
Symétrie orthogonale relativement à l'axe $0x$:



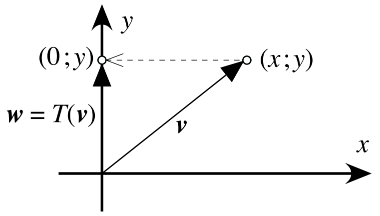
Symétrie orthogonale relativement à droite $y = x$:



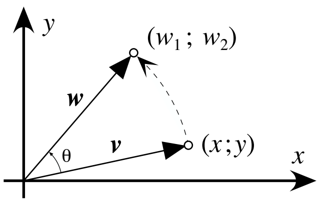
Projection orthogonale sur l'axe $0x$:



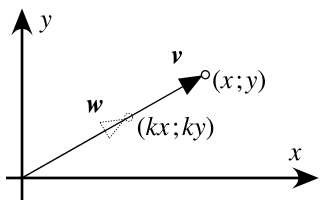
Projection orthogonale sur l'axe *0y* :



Rotation d'un angle θ autour de l'origine :

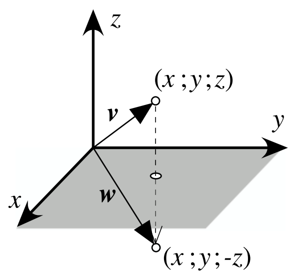


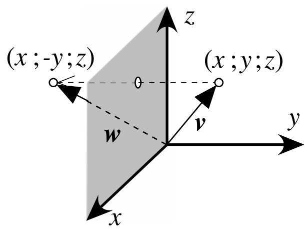
Homothétie de rapport *k* centrée à l'origine :



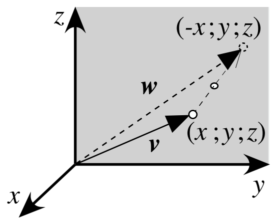
3.4 Quelques applications T usuelles de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Symétrie orthogonale relativement au plan *0xy* :

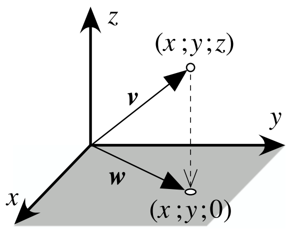




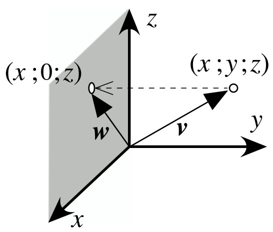
Symétrie orthogonale relativement au plan *0xz* :



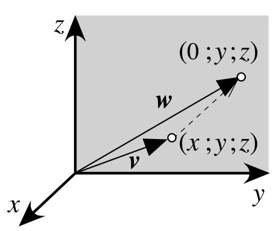
Symétrie orthogonale relativement au plan *0yz* :



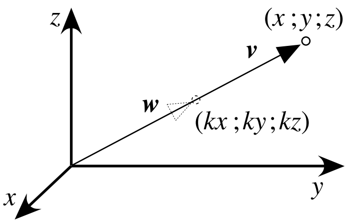
Projection orthogonale sur le plan *0xy* :



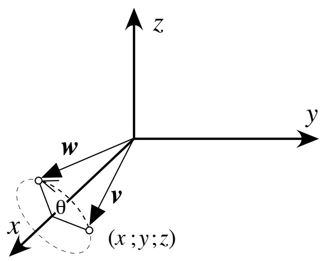
Projection orthogonale sur le plan *0xz* :



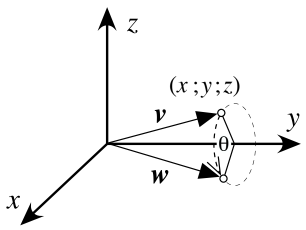
Projection orthogonale sur le plan *0yz* :



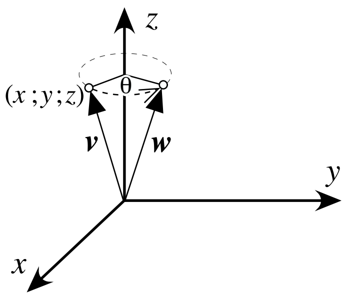
Homothétie de rapport k centrée à l'origine :



Rotation autour de l'axe $0x$ d'amplitude θ :



Rotation autour de l'axe $0y$ d'amplitude θ :



Rotation autour de l'axe $0z$ d'amplitude θ :

Remarque importante : *Dans les exercices qui suivent, si aucune précision n'est donnée concernant les bases utilisées, nous considérerons par convention les bases canoniques des espaces vectoriels.*

Exercice 3.13 : Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de la symétrie orthogonale relativement au plan $x + y = 0$

Exercice 3.14 : Construire les matrices des applications linéaires suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

a) la rotation d'un angle θ autour de l'origine dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

b) la projection sur la droite $y = 2x$ parallèlement à la droite $y = 3x$

Exemple Déterminer la matrice de la projection parallèle au vecteur $\boldsymbol{v} = (5\ ;\ 4\ ;\ 3)$ sur le plan d'équation $2x - 3y + z = 0$.

Exercice 3.15 : Construire la matrice de la projection sur le plan $x + y + z = 0$ parallèlement à la droite $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Exercice 3.16 : L'endomorphisme[1] $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{v} \to A\boldsymbol{v}$ consiste en la projection de l'espace $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $z = 0$ suivant la direction $(1 ; 1 ; 2)$. Déterminer la matrice A.

Exercice 3.17 :
a) Déterminer la matrice M de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.
b) Que vaut Det(M) ? Est-ce une surprise ?

Exercice 3.18 :
a) Déterminer dans la base canonique ordonnée la matrice M de la symétrie orthogonale relativement au plan $2x - 3y + z = 0$.
b) Que vaut M^2 ?

Exercice 3.19 : Soit l'application :

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{P}_2 & \to & \mathbb{P}_2 \\ & f & \mapsto & f' + f \end{array}$$

a) Montrer que L est une application linéaire.
b) Déterminer la matrice M de l'application linéaire L relativement à la base de $\mathbb{P}_2$:

$$\mathcal{B} = \left(x^2 ; x ; 1\right)$$

c) Montrer que la matrice M est inversible et calculer son inverse.
d) Résoudre l'équation $f' + f = x^2 - 2x - 3$.
(il s'agit donc de trouver la fonction $f \in \mathbb{P}_2$ qui satisfait à cette équation)

Exercice 3.20 : Soit l'application :

$$\begin{array}{rcc} L: \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & (\boldsymbol{i} - 1) \cdot z \end{array}$$

a) Déterminer la matrice M de l'application linéaire L relativement à la base canonique de $\mathbb{C}$.
b) Déterminer M^3.
c) Résoudre l'équation $(\boldsymbol{i} - 1)^3 \cdot z = 1$

[1] Une application linéaire d'un espace vectoriel vers lui-même s'appelle un **endomorphisme**.

3.4 Composition de 2 applications linéaires :

Définition : Soient V, W et R trois espaces vectoriels, $T : V \to W$ et $L : W \to R$ deux applications linéaires. **La composition** des deux applications T et L est l'application de V dans R définie par

$$(L \circ T)(\boldsymbol{v}) = L(T(\boldsymbol{v}))$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "L\circ T"'] & W \arrow[r, "L"] & R \end{tikzcd}$$

On montrera en exercice que l'application $L \circ T$ que nous venons de définir est bien une application linéaire.

Exemple : En considérant une base e dans V, f dans W et g dans R, nous allons nous intéresser à la matrice de $L \circ T$ en fonction des matrices de T et L. Observons ceci sur un exemple :

Soit ${}_fA_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ la matrice de T et ${}_gB_f = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ la matrice de L.

Soit $\boldsymbol{v} = (x\,;\,y)$ un vecteur de V. Alors

$$T(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$L(T(\boldsymbol{v})) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \\ a_{31}x + a_{32}y \end{pmatrix} =$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$L(T(\mathbf{v})) = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

On voit donc apparaître dans cet exemple la multiplication des 2 matrices $B{\cdot}A$.
Ce résultat se généralise dans le théorème suivant :

Théorème : Soient V, W et R trois espaces vectoriels, $T : V \to W$ et $L : W \to R$ deux applications linéaires et des bases ordonnées e de V, f de W et g de R. Alors la matrice ${}_g(L \circ T)_e$ représentant $L \circ T$ à travers les bases e et g est le produit des matrices ${}_gL_f$ et ${}_fT_e$ représentant L à travers les bases f et g et T à travers les bases e et f.

$$ {}_g(L \circ T)_e = {}_gL_f \cdot {}_fT_e $$

Preuve à compléter : Soit $\boldsymbol{v} \in V$. On a

$$
\begin{aligned}
{}_g(L \circ T)_e \cdot \boldsymbol{v}_e &= (L \circ T)(\boldsymbol{v})_{\ldots\ldots} \\
&= L(\underbrace{\ldots(\boldsymbol{v})}_{\boldsymbol{w}})_g \\
&= L(\boldsymbol{w})_{\ldots\ldots} \\
&= {}_{\ldots\ldots}L_{\ldots\ldots} \cdot \boldsymbol{w}_{\ldots\ldots} \\
&= {}_{\ldots\ldots}L_{\ldots\ldots} \cdot T(\ldots)_{\ldots\ldots} \\
&= {}_{\ldots\ldots}L_{\ldots\ldots} \cdot \left({}_{\ldots\ldots}T_{\ldots\ldots} \cdot \boldsymbol{v}_{\ldots\ldots}\right) \\
&= \left({}_{\ldots\ldots}L_{\ldots\ldots} \cdot {}_{\ldots\ldots}T_{\ldots\ldots}\right) \cdot \boldsymbol{v}_e
\end{aligned}
$$

> Rappel :
> Si $T : \underset{b.o.e}{V} \to \underset{b.o.f}{W}$
>
> $T(\boldsymbol{v})_f = {}_fT_e \cdot \boldsymbol{v}_e$

On a donc bien ${}_g(L \circ T)_e \cdot \boldsymbol{v}_e = \left({}_gL_f \cdot {}_fT_e\right) \cdot \boldsymbol{v}_e$ pour tout $\boldsymbol{v} \in V$, ce qui montre bien le résultat voulu.

Exercice 3.21 : Montrer que l'application $L \circ T$ est bien une application linéaire.

Exercice 3.22 : De $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on considère les deux transformations linéaires[2] suivantes:

T : rotation d'un angle de 30° autour de l'origine.
U : homothétie de rapport -1/2 centrée à l'origine.

En considérant la base canonique

a) déterminer les matrices de $U \circ T$ et $T \circ U$
b) que constatez-vous ?
c) ce résultat se généralise-t-il pour toute transformation géométrique ?

Exercice 3.23 : Démontrer les fameuses formules d'addition d'angles

(cf. page 30 formulaire)

a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

Exercice 3.24 : Déterminer dans la base canonique la matrice de rotation d'un angle de $\pi/3$ autour d'un axe perpendiculaire au plan α d'équation $y = z$

[2] On appelle **transformation linéaire** toute application linéaire représentant une transformation géométrique (rotation, projection, symétrie, …)

3.5 Matrice de changement de base :

Définition : Si V est un espace vectoriel muni de deux bases $e = (\boldsymbol{e}_1 ; \ldots ; \boldsymbol{e}_n)$ et $e' = (\boldsymbol{e}'_1 ; \ldots ; \boldsymbol{e}'_n)$ alors considérons l'application linéaire de V dans V (donc endomorphisme) où la base e est transformée en la base e'.

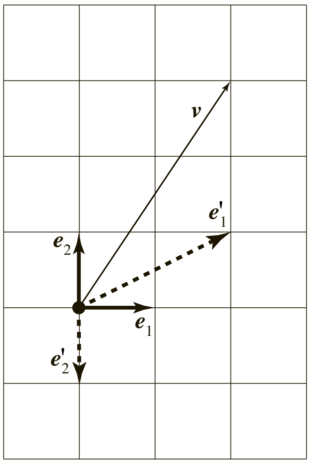
On sait que les colonnes de la matrice de cette transformation seront formées des vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ exprimés dans la base $\boldsymbol{e}'_i$.

Cette matrice s'appelle **matrice du changement de base** et sera notée : ${}_{e'}Id_e$

Exemple : Soit $V = \mathbb{R}^2$ muni des 2 bases suivantes :

$$e = (\boldsymbol{e}_1 ; \boldsymbol{e}_2) \text{ où } \boldsymbol{e}_1 = (1 ; 0) \text{ et } \boldsymbol{e}_2 = (0 ; 1)$$
$$e' = (\boldsymbol{e}'_1 ; \boldsymbol{e}'_2) \text{ où } \boldsymbol{e}'_1 = (2 ; 1) \text{ et } \boldsymbol{e}'_2 = (0 ; -1)$$

- Calculer ${}_{e'}Id_e$ (exprimer chaque $\boldsymbol{e}_i$ dans la base e')



- Calculer ${}_{e}Id_{e'}$ (exprimer chaque $\boldsymbol{e}'_i$ dans la base e)

- Exprimer $v_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base e'

- Exprimer $v_{e'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans la base e

- Les 2 transformations ${}_{e'}Id_e$, ${}_{e}Id_{e'}$ étant réciproques, il n'est pas surprenant que le produit des 2 matrices donne la matrice identité ou de manière plus pratique, une des matrices s'obtient comme l'inverse de l'autre.

Théorème : Soit V un espace vectoriel et $e = (\boldsymbol{e}_1 ; \ldots ; \boldsymbol{e}_n)$ et $e' = (\boldsymbol{e}'_1 ; \ldots ; \boldsymbol{e}'_n)$ deux bases de V.
Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur de V : • exprimé dans la base e, on le notera $\boldsymbol{v}_e$,
• exprimé dans la base e', on le notera $\boldsymbol{v}_{e'}$.

Alors,

1) $\boldsymbol{v}_{e'} = {}_{e'}Id_e \cdot v_e$

2) ${}_{e'}Id_e$ est inversible et $({}_{e'}Id_e)^{-1} = {}_{e}Id_{e'}$

Preuve:

Exercice 3.25 : $V = \mathbb{R}^2$ muni des 3 bases suivantes :

- la base canonique $e = (\boldsymbol{e}_1 ; \boldsymbol{e}_2)$,
- $e' = (\boldsymbol{e}'_1 ; \boldsymbol{e}'_2)$ où $\boldsymbol{e}'_1 = (1 ; -2)$ et $\boldsymbol{e}'_2 = (2 ; 1)$
- $e'' = (\boldsymbol{e}''_1 ; \boldsymbol{e}''_2)$ où $\boldsymbol{e}''_1 = (2 ; -1)$ et $\boldsymbol{e}''_2 = (1 ; 1)$

On considère les 3 vecteurs suivants : $\boldsymbol{v}_e = (2 ; 3)$, $\boldsymbol{w}_{e'} = (1 ; 1)$ et $\boldsymbol{u}_{e''} = (1 ; 1)$.

a) représenter la situation sur une figure d'étude,
b) déterminer ${}_{e}Id_{e'}$, ${}_{e''}Id_e$ et avec un minimum de calcul ${}_{e''}Id_{e'}$,
c) déterminer $\boldsymbol{v}_{e'}$, $\boldsymbol{v}_{e''}$, $\boldsymbol{w}_e$, $\boldsymbol{u}_{e'}$.

3.6 Représentations d'une application linéaire dans des bases différentes :

Soit $T : V \to W$ une application linéaire. Supposons V muni de deux bases ordonnées e et e' et W muni de deux bases ordonnées f et f'.

Connaissant la matrice ${}_fT_e$ de cette transformation exprimée dans les bases e et f, on sera amené à devoir déterminer la matrice ${}_{f'}T_{e'}$ de cette même transformation par rapport aux bases e' et f'. On a la formule :

$$\boxed{{}_{f'}T_{e'} = {}_{f'}Id_f \cdot {}_fT_e \cdot {}_eId_{e'}}$$

On peut résumer ce qui précède par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
V_{\text{base } e} \arrow[r, "{}_fT_e"] \arrow[d, shift right, "{}_{e'}Id_e"'] & W_{\text{base } f} \arrow[d, shift right, "{}_{f'}Id_f"'] \\
V_{\text{base } e'} \arrow[r, "{}_{f'}T_{e'}"'] \arrow[u, shift right, "{}_eId_{e'}"'] & W_{\text{base } f'} \arrow[u, shift right, "{}_fId_{f'}"']
\end{tikzcd}$$

Exemple : Soit l'application linéaire T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$T(x\,;y\,;z) = (3x + y + 2z\,;x + 2z\,;y)$$

On définit deux bases ordonnées:
- e la base canonique,
- $f = (\boldsymbol{f}_1\,;\boldsymbol{f}_2\,;\boldsymbol{f}_3)$ avec

$$\boldsymbol{f}_1 = (1\,;0\,;0)\ ,\quad \boldsymbol{f}_2 = (1\,;1\,;0)\quad \text{et}\quad \boldsymbol{f}_3 = (1\,;1\,;1).$$

Déterminer les deux matrices ${}_eT_e$ puis ${}_fT_f$.

Exercice 3.26 : **a)** Soit T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie par

$$T(x\,;\,y) = (2x + 3y\,;\,-y)$$

Déterminer la matrice ${}_eA_e$ de T relativement à la base canonique e puis ${}_fA_f$ relativement à la base $f = ((1\,;\,1)\,;\,(-1\,;\,2))$

b) Soit T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par

$$T(x\,;\,y) = (y\,;\,-5x + 13y\,;\,-7x + 16y)$$

Déterminer ${}_fA_e$ la matrice de T relativement aux bases :

$$e = (\boldsymbol{e}_1\,;\,\boldsymbol{e}_2) \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ et } f = (\boldsymbol{f}_1\,;\,\boldsymbol{f}_2\,;\,\boldsymbol{f}_3) \text{ de } \mathbb{R}^3$$

où : $\boldsymbol{e}_1 = (3\,;\,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (5\,;\,2)$;
$\boldsymbol{f}_1 = (1\,;\,0\,;\,-1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (-1\,;\,2\,;\,2)$, $\boldsymbol{f}_3 = (0\,;\,1\,;\,2)$.

1ère démarche: exprimer l'image des vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ dans la base $\boldsymbol{f}_i$.
2ème démarche: commencer par déterminer la matrice de T par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.27 : Soit L une application linéaire d'un espace vectoriel V dans lui-même. Supposons que dans la base $e = (\boldsymbol{e}_1\,;\,\boldsymbol{e}_2\,;\,\boldsymbol{e}_3)$ l'application L se représente par la matrice

$${}_eL_e = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

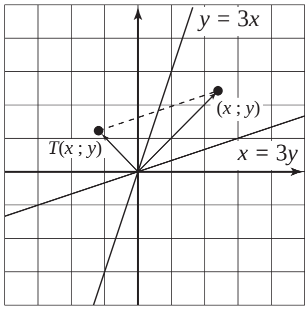
Notons $u = (\boldsymbol{u}_1\,;\,\boldsymbol{u}_2\,;\,\boldsymbol{u}_3)$ une nouvelle base avec:

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$$

Construire la matrice ${}_uL_u$.

Exercice 3.28 : Soit T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie de la manière suivante : l'image d'un point est le symétrique de ce point par rapport à la droite $y = 3x$, parallèlement à la droite $x = 3y$.

(cf. figure ci-contre)



Nous utiliserons 2 démarches afin de déterminer la matrice de cette application par rapport à la base canonique.

a) 1ère démarche géométrique :

Géométriquement, déterminer l'image des deux vecteurs de base (1 ; 0) et (0 ; 1). En déduire la matrice demandée.

b) 2ème démarche avec un changement de base :

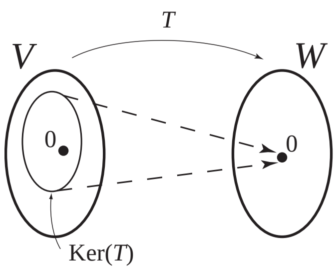
Choisir 2 vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ tel que $T(\boldsymbol{u}_1)$ et $T(\boldsymbol{u}_2)$ soient faciles à déterminer. Exprimer la matrice représentant ${}_uT_u$ à travers la base $(u_1 ; u_2)$. À l'aide des matrices de changement de base, déterminer ${}_eT_e$.

Exercice 3.29 : Soit T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie de la manière suivante : l'image d'un point est obtenue par une rotation de ce point d'un angle de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre autour de l'axe de rotation $x = y$.

Déterminer la matrice de cette application par rapport à la base canonique.

3.7 Ker(T), Im(T), injective, surjective et bijective :

Définition : Soit $T : V \to W$ une application linéaire.

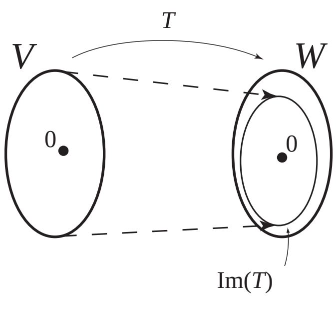


On appelle **noyau de *T***, noté **Ker(*T*)**, l'ensemble des $\boldsymbol{v} \in V$ tels que $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ (cf. figure ci-contre).

Donc par définition

$$\boxed{\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}}$$

Définition : Soit $T : V \to W$ une application linéaire.



On appelle **image de *T***, noté **Im(*T*)**, l'ensemble des $\boldsymbol{w} \in W$ tels qu'il existe $\boldsymbol{v} \in V$ avec $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ (cf. figure ci-contre).

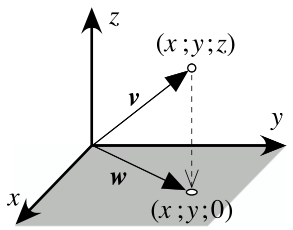
Donc par définition

$$\boxed{\mathrm{Im}(T) = \{\boldsymbol{w} \in W \mid \exists \boldsymbol{v} \in V \text{ tel que } T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}}$$

Remarques : Dans le cas des "fonctions classiques" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Ker(T) correspondrait aux zéros de la fonction f.
- Im(T) correspondrait à Im(f)

Exemple : **1)** Soit $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : P(x\,;\,y\,;\,z) = (x\,;\,y\,;\,0)$, la projection sur le plan Oxy parallèlement à l'axe des z. L'application P étant une application linéaire :



Ker(P) =

Im(P) =

Colorier en 2 couleurs différentes Ker(P) et Im(P) sur la représentation ci-contre :

Déterminer la dimension de Ker(P) et d'Im(P)

Exemple : **2)** Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : T(x_1\,;\,x_2\,;\,x_3) = (x_1 + x_2\,;\,2x_1 + x_3)$
Déterminer Ker(T), en donner une base et sa dimension.

Théorème : Soit $T : V \to W$ une application linéaire. Alors

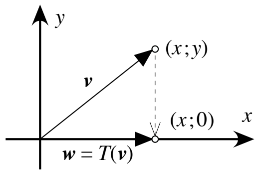
- Ker(T) est un SEV de V.
- Im(T) est un SEV de W.

Exercice 3.30 : Démontrer le théorème précédent.

Exercice 3.31 : Pour chacune des transformations linéaires T suivantes :

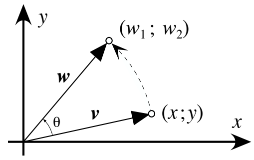
1) Colorier en 2 couleurs différentes Ker(T) et Im(T)
2) Expliciter Ker(T), Im(T)
3) Préciser les dimensions de Ker(T) et Im(T)
4) Que peut-on conjecturer sur dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) ?

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



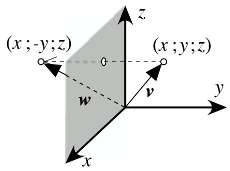
Projection orthogonale sur l'axe 0x

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



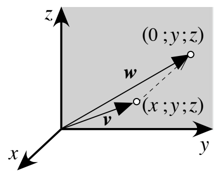
Rotation d'un angle θ autour de l'origine

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



Symétrie orthogonale relativement au plan 0xz

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



Projection orthogonale sur le plan 0yz

Exercice 3.32 : Pour chacune des applications linéaires T suivantes, calculer Ker(T), en donner une base et sa dimension.

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x_1 ; x_2 ; x_3) \mapsto (x_1 + x_2 ; 2x_3)$
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1 ; x_2) \mapsto (x_1 ; 0)$
c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T(x_1 ; x_2) = (2x_1 ; x_2)$
d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : T(x ; y) = (x ; y ; x + y)$
e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : T(x ; y ; z) = (x + 2y + 3z ; 4x + 5y + 6z ; 7x + 8y + 9z)$

Définitions : Soit une application linéaire $T : V \to W$

- elle est dite **injective** si pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de V

$$\boxed{\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v} \;\Rightarrow\; T(\boldsymbol{u}) \neq T(\boldsymbol{v})}$$

ou de façon équivalente : $\boxed{T(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{v}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}}$

- elle est dite **surjective** si tous les vecteurs de W sont atteints :

$$\boxed{T(V) = W}$$

- elle est dite **bijective** (*one to one*) si elle est à la fois injective et surjective

Exercice 3.33 : **1)** Parmi les 4 applications linéaires proposées à l'exercice 3.31, lesquelles sont injectives, surjectives, bijectives ?

2) Parmi les 5 applications linéaires proposées à l'exercice 3.32, lesquelles sont injectives, surjectives, bijectives ?

Exemple : **a)** Déterminer une base du noyau Ker(T) de la transformation linéaire de matrice A avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Déterminer une base de Im(T)

Pour répondre à la partie ***b)*** *de l'exemple, nous aurons besoin du théorème suivant :*

Théorème : Si V et W sont des espaces vectoriels de dimension finie et si $T : V \to W$ est une application linéaire alors l'image par T d'une famille génératrice de V est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(T)$.

Preuve :

Attention : Le théorème ne dit pas que l'image d'une base est une base. Par contre, **l'image d'une base est une famille génératrice**. Il restera à contrôler si elle est libre ou non.

Reprise de l'exemple : Déterminer une base de $\mathrm{Im}(T)$ de la transformation linéaire de matrice A avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.34 : Soit F une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $F(\boldsymbol{v}) = A\cdot\boldsymbol{v}$

avec $A = \begin{pmatrix} -21 & -35 & -42 \\ 9 & 15 & 18 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

a) Donner une base de $\mathrm{Im}(F)$
b) Vérifier que $\mathrm{Im}(F) \subset \mathrm{Ker}(F)$
c) Sans calculer A^2, montrer que $A^2 = 0$

Exercice 3.35 : Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de définie par $F(\boldsymbol{v}) = A\cdot\boldsymbol{v}$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer $F(1\,;2\,;3)$
b) Déterminer $\mathrm{Ker}(F)$
c) Démontrer que $\mathrm{Im}(F) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\}$
d) Interpréter F géométriquement.

Exercice 3.36 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Notons L_A l'application linéaire associée : $L_A(\boldsymbol{v}) = A\cdot\boldsymbol{v}$

a) Déterminer le rang de cette matrice.
b) Décrire le noyau de A, donner une base, préciser la dimension
c) Même question pour l'image de A.

Théorème : Une application linéaire T est injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$

Preuve :

Exercice 3.37 : Soit F une application linéaire représentée dans la base canonique par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Pour quelle(s) valeur(s) de k l'application F est-elle injective.

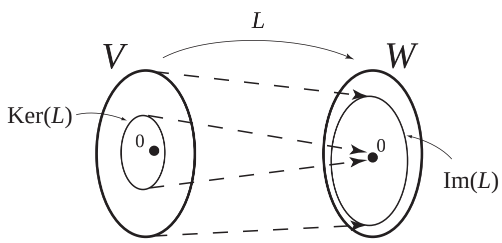
b) Soit $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de k, le système $A \cdot \boldsymbol{v} = b$ n'admet-il aucune solution ?

c) Pour $k = 0$, trouver l'inverse de A et résoudre, grâce à cet inverse, le système $A \cdot \boldsymbol{v} = b$

3.8 Théorème du rang (ou théorème des dimensions):

Théorème des dimensions : Si V et W sont des espaces vectoriels de dimension finie et si $L : V \to W$ est une application linéaire alors

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(L) + \dim \mathrm{Im}(L)$$



Avant d'en voir une preuve, utilisons ce résultat dans quelques exercices :

Exercice 3.38 :

a) Soit $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire telle que $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{Im}(F)$. Que vaut $\dim \mathrm{Ker}(F)$?

b) Construire une application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$

c) Soit $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire injective. Que vaut $\dim \mathrm{Im}(R)$?

Exercice 3.39 : Soient $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ trois vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$, et $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que

$T(\boldsymbol{v}_1) = (1 ; 0 ; 0)$, $T(\boldsymbol{v}_2) = (0 ; 1 ; 0)$ et $T(\boldsymbol{v}_3) = (0 ; 0 ; 1)$.

Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$.

Exercice 3.40 : La transformation linéaire T de matrice A est-elle injective ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

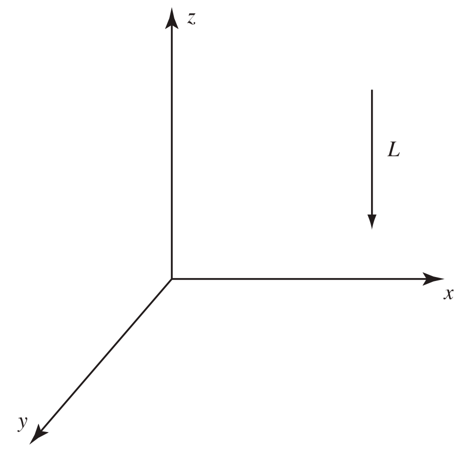
La preuve du théorème des dimensions $\dim V = \dim \operatorname{Ker}(L) + \dim \operatorname{Im}(L)$

<u>*Preuve proprement dite :*</u>

- Prenons une base $(\boldsymbol{v}_1 ; \ldots ; \boldsymbol{v}_s)$ de $\operatorname{Ker}(L)$ supposé de dim s.
- Etendons cette base en une base $(\boldsymbol{v}_1 ; \ldots ; \boldsymbol{v}_s ; \boldsymbol{v}'_1 ; \ldots ; \boldsymbol{v}'_r)$ de V supposé de dim $r + s$
- En vertu du théorème page 82, $\operatorname{Im}(L)$ est engendré par les vecteur $L(\boldsymbol{v}_i)$ et les vecteurs $L(\boldsymbol{v}'_i)$, c'est-à-dire par les vecteurs $L(\boldsymbol{v}'_i)$ car $L(\boldsymbol{v}_i) = 0$.
- Les vecteurs $L(\boldsymbol{v}'_1)$, … , $L(\boldsymbol{v}'_r)$ forment donc une partie génératrice de $\operatorname{Im}(L)$. Montrons qu'ils en forment aussi une partie libre donc une base.
- En effet, si les scalaires α_i sont tels que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot L(\boldsymbol{v}'_i) = 0$ on aura $L\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \boldsymbol{v}'_i\right) = 0$. Donc $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \boldsymbol{v}'_i$ appartient à $\operatorname{Ker}(L)$. On pourra donc exprimer ce vecteur comme combinaison linéaire des $(\boldsymbol{v}_1 ; \ldots ; \boldsymbol{v}_s)$:
  $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \boldsymbol{v}'_i = \sum_{j=1}^{s} \beta_j \cdot \boldsymbol{v}_j$ ou encore $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \boldsymbol{v}'_i - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \cdot \boldsymbol{v}_j = 0$ et donc finalement $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \boldsymbol{v}'_i + \sum_{j=1}^{s} (-\beta_j) \cdot \boldsymbol{v}_j = 0$.
- Comme la suite $(\boldsymbol{v}_1 ; \ldots ; \boldsymbol{v}_s ; \boldsymbol{v}'_1 ; \ldots ; \boldsymbol{v}'_r)$ est une base (donc libre) tous les α_i et β_j sont nuls.
- Ainsi $\dim \operatorname{Im}(L) = r$ mais on a $\dim \operatorname{Ker}(L) = s$, $\dim V = r + s$

Donc $\boxed{\dim V = \dim \operatorname{Ker}(L) + \dim \operatorname{Im}(L)}$

<u>*Un exemple concret :*</u> $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
Projection orthogonale sur le plan 0xy :



Théorème : Soit $T: V \to W$ une application linéaire où V et W sont des espaces vectoriels de même dimension finie.
Alors, les affirmations sont équivalentes :

(1) $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$
(2) T est injective
(3) T est surjective
(4) T est bijective

Exercice 3.41 : Prouver le théorème précédent.

Définition : Soit A une matrice de type $m \times n$.
On appelle **transposée de A**, la matrice notée A^T (de type $n \times m$) obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exemple : Déterminer la transposée de la matrice A définie par:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.42 : Calculer le rang des matrices suivantes puis de leur transposée:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Théorème : Soit A une matrice, alors $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T)$

Sans preuve.

Corollaire : Soit $T : V \to W$ une application linéaire de définie par $T(\boldsymbol{v}) = A \cdot \boldsymbol{v}$
alors : $\boxed{\dim \mathrm{Im}(T) = \mathrm{rang}\, A}$.

Exercice 3.43 : Discuter le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.44 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

a) Donner la forme échelonnée réduite de A

b) Quel est le rang de A ?

c) Quelle est la dimension de l'image de l'application linéaire définie par A ?

d) Quelle est la dimension du noyau de cette application linéaire ?

e) Donner une base de ce noyau.

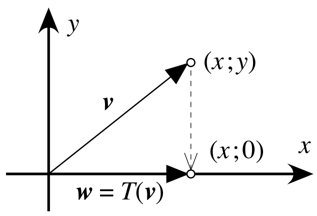
Exercice 3.45 : Pour chacune des 4 transformations linéaires T ci-dessous :

1) Déterminer la matrice A de cette transformation

2) Si possible, déterminer la matrice B de la transformation inverse. Si ce n'est pas possible, expliquez pourquoi.

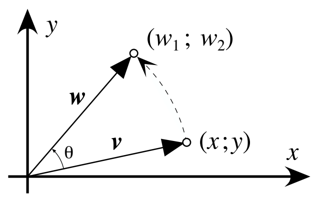
3) Que pouvez-vous affirmer au sujet de ces 2 matrices A et B ?

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



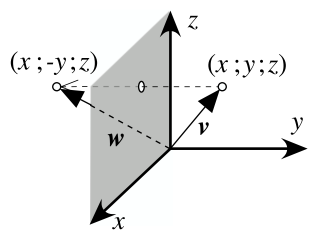
Projection orthogonale sur l'axe 0x

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



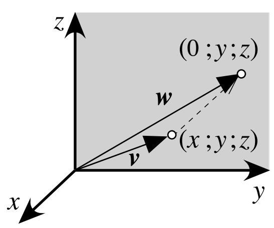
Rotation d'un angle θ autour de l'origine

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



Symétrie orthogonale relativement au plan 0xz

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



Projection orthogonale sur le plan 0yz

Théorème : Soit A une matrice carrée d'ordre n. Alors :

A est inversible $\Leftrightarrow$ L'application $L_A : \boldsymbol{v} \rightarrow A \cdot \boldsymbol{v}$ est bijective.
$\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

Exercice 3.46 : Déterminer pour quelles valeurs de λ les matrices suivantes sont inversibles et calculer ces inverses.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Chapitre 4: Valeurs propres et vecteurs propres

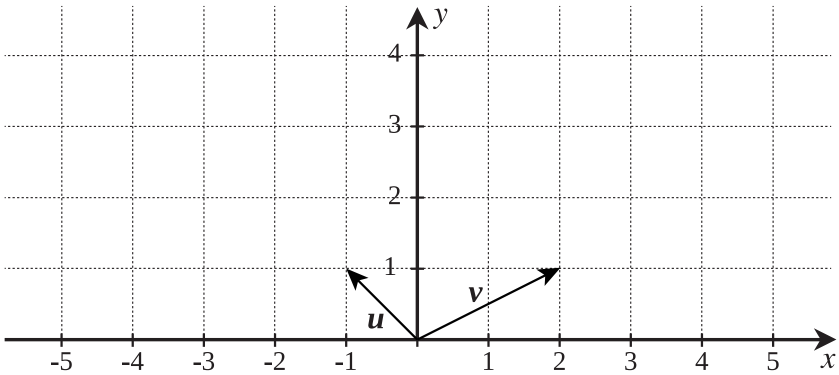
4.1 Introduction et définitions

Introduction : S'il est vrai qu'une transformation linéaire $\boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$ peut faire bouger un vecteur dans des directions très variées, il arrive souvent que, sur certains vecteurs, l'effet de A soit extrêmement simple.

Observons ceci sur un exemple de $\mathbb{R}^2$:

Soit $A = \begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 \\ 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u} = (-1\ ;\ 1)$ et $\boldsymbol{v} = (2\ ;\ 1)$.

a) Calculer puis construire ci-dessous $A\boldsymbol{u}$, ainsi que $A\boldsymbol{v}$.



b) Calculer $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ puis $A\boldsymbol{w}$. Représenter le tout ci-dessus.

c) Que constate-t-on ?

Définition : Soit L une application linéaire d'un espace vectoriel V dans lui-même. Un vecteur $\boldsymbol{v}$ de V non nul est appelé **vecteur propre de L** s'il est **colinéaire** à son **image $L(\boldsymbol{v})$**, ce qui signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $L(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$.
Ce nombre λ s'appelle **valeur propre associée** au vecteur propre.

Remarques :

- On peut également proposer cette définition équivalente :

  Un nombre réel λ est appelé une ***valeur propre*** *de L s'il existe un vecteur v non nul tel que L(**v**) = λ**v**. Ce vecteur **v** s'appelle* ***vecteur propre associé*** *à la valeur propre.*

- Si A est la représentation matricielle de l'application linéaire L, un vecteur propre (resp. valeur propre) de A sera par définition un vecteur propre (resp. valeur propre) de l'application linéaire L.

4.2 Notions intuitives sur les vecteurs propres et valeurs propres

Exemple : Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que le vecteur $\boldsymbol{v} = (1\,;0\,;0)$ est un vecteur propre de valeur propre $\lambda = 2$.

b) Montrer que le vecteur $\boldsymbol{w} = (1\,;1\,;1)$ est un vecteur propre dont on déterminera sa valeur propre λ associée

c) Montrer que $\lambda = -1$ est une valeur propre dont on déterminera le vecteur propre associé.

Exercice 4.1 : **a)** La valeur $\lambda = 2$ est-elle une valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$?

Si oui, déterminer un vecteur propre associé.

b) Le vecteur $\boldsymbol{v} = (1\,;4)$ est-il un vecteur propre de $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$?

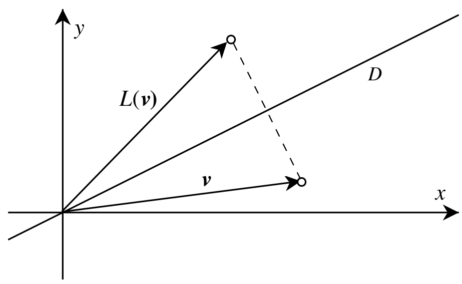
Si oui, déterminer la valeur propre λ associée.

c) La valeur propre $\lambda = 4$ est-elle une valeur propre de

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} ?$$

Si oui, déterminer le ou les vecteurs propres associés.

Exemple : La symétrie L par rapport à une droite D passant par l'origine est une application linéaire.



a) Que peut-on affirmer au sujet de tout vecteur non nul situé sur D ?

b) Que peut-on affirmer au sujet de tout vecteur non nul perpendiculaire à D ?

En déduire 2 vecteurs propres, ainsi que leur valeur propre associée, de l'application L

Exercice 4.2 : La rotation $\mathcal{R}$ d'angle θ autour de l'origine dans le plan est une application linéaire représentée dans les bases canoniques par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

a) Si θ n'est pas un multiple de π, montrer que $\mathcal{R}$ n'admet aucun vecteur propre.

b) Si $\theta = \pi$, déterminer les vecteurs propres (et valeurs propres) de $\mathcal{R}$.

c) Si $\theta = 2\pi$, déterminer les vecteurs propres (et valeurs propres) de $\mathcal{R}$.

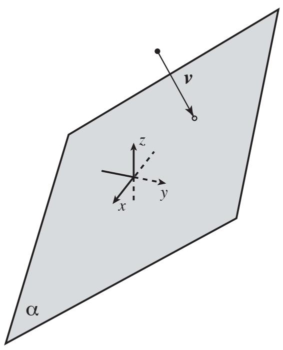
Exercice 4.3 : Démontrer les affirmations suivantes:

a) Si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de L de valeur propre λ et si α est un nombre réel non nul, alors $\alpha\boldsymbol{v}$ est aussi un vecteur propre de L de valeur propre λ.

b) Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont deux vecteurs propres de L de même valeur propre λ et si $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \neq 0$, alors $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de L de valeur propre λ.

c) Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, linéairement indépendants, sont deux vecteurs propres de L de même valeur propre λ, alors que peut-on affirmer au sujet du vecteur $\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$ pour tout α, β non nuls ?

Exemple : On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$ la projection $\mathcal{P}$ sur un plan α passant par l'origine, parallèlement à un vecteur $\boldsymbol{v}$.
L'application $\mathcal{P}$, ainsi définie, est une application linéaire.



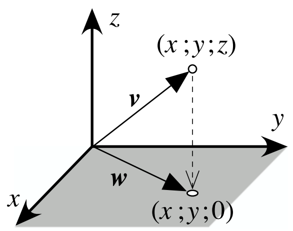
a) Que peut-on affirmer au sujet des vecteurs du plan α ?

b) Que peut-on affirmer au sujet du vecteur $\boldsymbol{v}$ définissant la direction de projection ?

En déduire 2 valeurs propres λ_1 et λ_2 de l'application L, et discuter des vecteurs propres associés.

Définition : Si λ est une valeur propre de l'application linéaire L, on note $V_{\lambda\, =\, \ldots}$ le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs propres de valeur propre $\lambda = \ldots$.

Exemple : On considère la projection orthogonale sur le plan Oxy. Déterminer 2 valeurs propres, leurs vecteurs propres associés, ainsi que les espaces propres.



Exercice 4.4 : Pour chaque transformation linéaire suivante, déterminer des valeurs propres, leurs vecteurs propres associés, ainsi que les espaces propres.

Dans $\mathbb{R}^2$

a) Symétrie orthogonale relativement à l'axe Oy.

b) Projection orthogonale sur la droite $y = x$.

Dans $\mathbb{R}^3$

c) Projection orthogonale sur le plan Oyz.

d) Symétrie orthogonale relativement au plan Oxz.

e) Projection orthogonale sur le plan $y = z$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire L_A.

Sachant que $\lambda = 2$ est une valeur propre de A, déterminer une base associée de l'espace propre $V_{\lambda = 2}$.

Exercice 4.5 : Déterminer l'espace propre associé à chaque valeur propre mentionnée.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = 1$ puis $\lambda = 5$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = -2$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = 3$ puis $\lambda = 8$

Théorème : L'ensemble $\{\boldsymbol{v}_1 ; \ldots ; \boldsymbol{v}_r\}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ d'une matrice carrée A d'ordre n est linéairement indépendant.

Sans preuve.

Exercice 4.6 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & -6 \end{pmatrix}$,

a) En échelonnant la matrice augmentée adéquate, résoudre l'équation $A \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$

b) Expliquer pourquoi cette équation admet "une" solution non triviale, c'est-à-dire différente du vecteur nul $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$.

c) Que peut-on affirmer au sujet de déterminant Det(A) ?

Théorème : L'équation matricielle $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ admet une solution non triviale

$$\Updownarrow$$

$$\text{Det}(A) = 0$$

Justification :

Théorème :

$$\text{Résoudre l'équation matricielle } A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{Résoudre l'équation matricielle } (A - \lambda I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

Preuve : Posons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$,

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n = \lambda v_1 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n = \lambda v_2 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n = \lambda v_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + \cdots + a_{2n}v_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)v_n = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

Théorème : Un scalaire λ est une valeur propre d'une matrice carrée A d'ordre n si et seulement si λ satisfait à **l'équation caractéristique** $\det(A - \lambda I) = 0$

Preuve :

Exemple (début) : Déterminer l'équation caractéristique puis les valeurs propres de l'endomorphisme donné par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$)

Exercice 4.7 : Déterminer l'équation caractéristique et les valeurs propres des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 4.8 : Montrer que l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$h((x\,;\,y)) = (-y\,;\,x)$$

n'admet aucune valeur propre.

Exercice 4.9 : Déterminer l'équation caractéristique et les valeurs propres des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple (fin) : Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de l'endomorphisme donné par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.10 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer l'équation caractéristique A.
b) En déduire les valeurs propres.
c) Pour chaque valeur propre, déterminer l'espace propre associé.
d) En déduire la transformation géométrique définie par cette matrice.

Exercice 4.11 : On considère un endomorphisme défini par une matrice carrée d'ordre n. Justifier l'affirmation suivante :

Un tel endomorphisme admet au plus n valeurs propres différentes.

Exercice 4.12 : Déterminer les valeurs propres de la matrice triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ce résultat se généralise-t-il à toute matrice carrée d'ordre n ?

Exercice 4.13 : Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 4.14 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer l'équation caractéristique A.
b) En déduire les valeurs propres.
c) Pour chaque valeur propre, déterminer l'espace propre associé.
d) En déduire la transformation géométrique définie par cette matrice.

Exercice 4.15 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la transformation géométrique définie par cette matrice.

Exercice 4.16 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer ses valeurs propres.
b) Déterminer leur espace propre associé.
c) Quelle est la transformation géométrique définie par cette matrice.

Exercice 4.17 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer ses valeurs propres.
b) Déterminer leur espace propre associé.
c) Que devient la matrice de cet endomorphisme si l'on considère, non pas la base canonique, mais la base formée par les 3 vecteurs propres ?

Exercice 4.18 : On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ donné dans la base canonique e par la matrice :

$${}_eA_e = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'équation caractéristique de f.
b) Donner les valeurs propres de f.
c) Déterminer une base e' de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice associée à f est diagonale et vaut :

$${}_{e'}A_{e'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

d) Déterminer les 2 matrices ${}_{e'}Id_e$ et ${}_eId_{e'}$ tels que :

$${}_eA_e = {}_eId_{e'} \cdot {}_{e'}A_{e'} \cdot {}_{e'}Id_e$$

e) Calculer $\left({}_{e'}A_{e'}\right)^n$ puis exprimer $\left({}_eA_e\right)^n$ en fonction de $\left({}_{e'}A_{e'}\right)^n$.

f) Calculer $\left({}_eA_e\right)^6$

Définition : Un endomorphisme est **diagonalisable** s'il existe une base dans laquelle la matrice de cet endomorphisme est diagonale.

Exercice 4.19 : On considère l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ donné, dans la base canonique e par la matrice :

$$H = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & 18 & -6 \\ 18 & 1 & 6 \\ -6 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les espaces propres associés.
b) Diagonaliser H puis donner les matrices de passage et la relation qui lie ces matrices.
c) Montrer que l'image de la base canonique e par cet endomorphisme est une base orthonormée.
d) Caractériser géométriquement cet endomorphisme h.

Exercice 4.20 : On considère T la transformation géométrique suivante :

Symétrie orthogonale vectorielle de direction parallèle à $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les 2 valeurs propres de cette transformation
b) Donner une matrice diagonale de T en précisant la base e' à considérer.
c) Donner les matrices de passages permettant d'exprimer T dans la base canonique e.
d) Donner la matrice de cette transformation par rapport à la base canonique.

Éléments de réponses du chapitre 1:

Exercice 1.1 : **a)** 4×3 **b)** 0 ; 1/2 ; n'existe pas

c) b_{42} ; b_{33}

Exercice 1.2 : $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \\ 8 & -16 & 24 \end{pmatrix}$

Exercice 1.3 : **a)** $C = \begin{pmatrix} 50 & 45 & 55 \\ 52 & 70 & 30 \end{pmatrix}$

b) coûts de transport pour le produit 2

c) coûts totaux pour le client 3

d) coûts du produit 1 pour le client 2

Exercice 1.4 : $\begin{pmatrix} 500'000 & 50'000 & 2'500 \\ 200'000 & 20'000 & 1'000 \\ 100'000 & 10'000 & 500 \\ 40'000 & 4'000 & 200 \end{pmatrix}$

Exercice 1.5 : **a)** 4×5 ; 3×3 ; 2×2 ; 2×3

b) imp ; 10 ; 7 ; 1 ; 2 ; 0 ; 5 ; imp ; 7

c) B, C et G ; F et G ; E et G ; G

Exercice 1.6 : $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,05 \\ 0,1 & 0,75 & 0,05 \\ 0,1 & 0,05 & 0,9 \end{pmatrix}$

Exercice 1.7 : **a)** $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix} = B + A$ *; l'addition semble être commutative.*

b) $\frac{1}{2}(A+B) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ *; ce calcul semble être distributif.*

c) Calcul impossible, car les matrices ne sont pas du même type.

Exercice 1.8 : sera vu ensemble à votre demande.

Exercice 1.9 : **a)** 16 + 25 + 36 + 49 + 1 **b)** $\sum_{i=1}^{17}(2i+1)$ **c)** $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

Exercice 1.10 : **a)** $BD = I_2$ **b)** $FE - 2A$ non défini

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 13 & -18 & 8 \\ 16 & 17 & -16 \\ 0 & 16 & 5 \end{pmatrix}$ **d)** E^2 non défini

e) $(3) + GH = (47)$ **f)** $I_3E = E$

g) $CI_3 = C$ **h)** $AEF = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 257 \\ -3 & -6 & 29 \\ 53 & 106 & 201 \end{pmatrix}$

Exercice 1.11 : **a)** $A(BC) = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 27 & -33 \end{pmatrix} = (AB)C$ *; la multiplication semble associative.*

b) $A(B+C) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 4 & 14 \end{pmatrix} = AB + AC$ *; ce calcul semble distributif.*

c) $AI_n = A$ mais I_nA n'est pas calculable.

Exercice 1.12 : $X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -11/2 & -23/2 \end{pmatrix}$

Exercice 1.13 : **a)** $A = \begin{pmatrix} 1'000 & 2'000 & 1'000 \\ 5'000 & 1'000 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** Il s'agit de $0,7A$

c) Matrice inventaire = $\begin{pmatrix} 700 & 1'400 & 700 \\ 3'500 & 700 & 0 \end{pmatrix}$

d) $V = 0,3A = \begin{pmatrix} 300 & 600 & 300 \\ 1'500 & 300 & 0 \end{pmatrix}$ **e)** $P = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix}$

f) R représente les revenus, par entrepôt, que l'éditeur prévoit tirer de la vente des livres au cours de l'année.

g) $R = \begin{pmatrix} 30'000 \\ 37'500 \end{pmatrix}$

Exercice 1.14 : **a)** $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) le produit de deux matrices non nulles peut être nul.

Exercice 1.15 : **a)** $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) le produit de deux matrices n'est pas commutatif.

Exercice 1.16 : pas de solution proposée.

Exercice 1.17 : $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \Leftrightarrow AB = BA$ *ce qui n'est pas vrai dans le cas général.*

Exercice 1.18 : Récurrence: 1ère étape : vérifiez la formule pour $n = 1$;
2ème étape : supposez la formule vraie pour A^n, et démontrez qu'elle reste vraie pour $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.19 :

a) a_{21} représente la quantité de fibres alimentaires dans 30 g du premier aliment.

b) b_{13} représente la portion d'aliment 1 dans une portion de 30 g du déjeuner du type 3.

c) La deuxième colonne de la matrice A représente la quantité de protéines, de fibres alimentaires et de matières grasses dans 30 g du deuxième aliment.

d) Le produit matriciel BA n'a pas de sens.

e) Le produit matriciel AB donne les quantités de protéines (ligne 1), de fibres alimentaires (ligne 2) et de matières grasses (ligne 3) contenues dans une portion de 30 g de chacun des déjeuners représentés par une colonne de la matrice.

$$AB = \begin{pmatrix} 3{,}4 & 3{,}8 & 4{,}2 \\ 10{,}6 & 8{,}2 & 5{,}8 \\ 1{,}2 & 1{,}4 & 1{,}6 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.20 : A et C ; B et F ; D et G.

Exercice 1.21 : Supposer l'existence d'une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et trouver une contradiction.

QUELQUES REPONSES AUX EXERCICES

Exercice 1.22 : Il suffit de vérifier que $A \cdot A^{-1} = I_2 = A^{-1} \cdot A$

Exercice 1.23 : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3/2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ C est non inversible.

Exercice 1.24 :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 37 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; S = {(-7 ; 3)}

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{3} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -23 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{93}\begin{pmatrix} 90 & 36 \\ 80 & -30 \end{pmatrix}$; S = {(-6 ; 10)}

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 30 \end{pmatrix}$; non inversible ; $S = \{(x ; y) \mid 3x + 2y = -15\}$

Exercice 1.25 : **a)** Il s'agit de montrer que le produit de ces 2 matrices donne I_3.

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 1.26 : A n'est pas échelonnée
B est échelonnée (non réduite)
C est échelonnée réduite
D est échelonnée (non réduite)
E n'est pas échelonnée

Exercice 1.27 : $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 1.28 : $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.29 :

$$E = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & j & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & \alpha & \ddots & \\ & & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 1.30 : **a)** $E_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$

b) $X=E_3\cdot E_2\cdot E_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\-2&-1&1\end{pmatrix}$,

il serait judicieux de contrôler que $X\cdot A=A'$.

c) $E_4=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $E_5=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$Y=E_5\cdot E_4\cdot X=\begin{pmatrix}1/2&-1/2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1/2&1/2&0\\1&0&0\\-2&-1&1\end{pmatrix}$$

Exercice 1.31 : Et si vous échelonniez la matrice…

Exercice 1.32 : **a)** S = {(-2 ; 2 ; -1)} **b)** S = {(3 ; -1)}

c) S = {(1 ; -1 ; 2 ; -2)} **d)** S = $\varnothing$

e) S = {($3t-25$; $-4t+29$; t ; 7) | $t\in$ IR}

Exercice 1.33 : Échelonner puis réduire la matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&0&5&1&0&0\\0&1&-6&0&1&0\\3&0&4&0&0&1\end{array}\right)$

et on obtient $X_1=\begin{pmatrix}4\\-18\\-3\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $X_3=\begin{pmatrix}-5\\24\\4\end{pmatrix}$

Exercice 1.34 : **a)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}$ **b)** $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\7/2&3/4&-5/4\\-5/2&-1/4&3/4\end{pmatrix}$

c) $C^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&5&-2&1\\-1&-7&7&1\\-1&-4&4&1\\0&9&-9&-3\end{pmatrix}$ **d)** $D^{-1}=\frac{1}{40}\begin{pmatrix}-9&1&1&11\\1&1&11&-9\\1&11&-9&1\\11&-9&1&1\end{pmatrix}$

Exercice 1.35 : **a)** $X=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ **b)** $A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&11&-6\\-1&-16&10\\-2&3&-1\end{pmatrix}$

$$A^{-1}\cdot B=X$$

Exercice 1.36 : sera vu individuellement à votre demande.

Exercice 1.37 : **a)** $|A_{12}|=0$ **b)** $|A_{23}|=34$

c) $a_{11}\cdot|A_{11}|-a_{12}\cdot|A_{12}|+a_{13}\cdot|A_{13}|=-3$

d) $-a_{12}\cdot|A_{12}|+a_{22}\cdot|A_{22}|-a_{32}\cdot|A_{32}|=-3$ *(même réponse que le (c) ??)*

e) $a_{22}\cdot|A_{22}|=-3$ *(même réponse que le (d) et donc que le (c) ??)*

Exercice 1.38 : **a)** $|A|=2$ **b)** $|A|=2$ **c)** $|A|=-125$

d) $|A|=48$ **e)** $|A|=-235{,}68$

Exercice 1.39 : $\sum_{j=1}^{3}(-1)^{3+j}a_{3j}\cdot|A_{3j}|=\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+2}a_{i2}\cdot|A_{i2}|=$ et vaut :

$$a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

Exercice 1.40 : **a)** $\begin{vmatrix}-5&4&1\\3&-2&7\\2&0&6\end{vmatrix}=48$

Exercice 1.41 : **a)** $|A|=-216$ **b)** $|A|=abcd$ **c)** $|A|=10'739{,}92$

Exercice 1.42 : **a)** $\begin{vmatrix}x&y&z\\2&-1&6\\-3&5&1\end{vmatrix}=-31x-20y+7z$ **b)** $\begin{vmatrix}3&5&x\\0&-6&y\\1&-1&z\end{vmatrix}=6x+8y-18z$

Exercice 1.43 : sera vu ensemble à votre demande.

Exercice 1.44 : et si vous développiez le déterminant par rapport à cette ligne .

Exercice 1.45 : A est inversible si et seulement si $\lambda\neq -1$ et

$$A^{-1}=\frac{1}{1+\lambda^3}\begin{pmatrix}-\lambda&1&\lambda^2\\1&\lambda^2&-\lambda\\\lambda^2&-\lambda&1\end{pmatrix}$$

Exercice 1.46 : **a)** S = {(4 ; -2)} **b)** S = {(8 ; 0)} **c)** S = $\varnothing$ *(à résoudre à la main)*

Exercice 1.47 : sera vu ensemble à votre demande.

Exercice 1.48 : **a)** S = {(2 ; 3 ; -1)} **b)** S = {(-2 ; 4 ; 5)} **c)** $S_{(x;y;z;w)}$ = {(3 ; -1 ; -2 ; 4)}

Éléments de réponses Chapitre 2:

Exercice 2.1 : **a)** $M_{2\times 3}$ muni des opérations sur les matrices est bien un espace vectoriel, car il vérifie bien les 8 propriétés d'un EV.

b) Ce résultat se généralise à toute matrice $M_{m\times n}$.

Exercice 2.2 : $\mathbb{P}_2$ muni des opérations habituelles est bien un espace vectoriel, car il vérifie bien les 8 propriétés d'un EV.

Exercice 2.3 : **a)** Non, car cet ensemble ne contient pas le vecteur nul et en particulier cet élément n'admet pas d'élément opposé.

b) Cet ensemble est bien un espace vectoriel, il vérifie les 8 propriétés.

Exercice 2.4 : L'addition étant définie de manière naturelle, elle vérifie les 4 premières propriétés d'un EV.

La distributivité I est également vérifiée, par contre, la distributivité II n'est pas vérifiée. Par exemple :
$(1 + 2) \cdot (4 ; 3) = (12 ; 3)$ mais $1(4 ; 3) + 2(4 ; 3) = (12 ; 6)$

Exercice 2.5 : **a)** Ce n'est pas un espace vectoriel, car pour un vecteur donné de V, son opposé n'appartient pas à V. De plus, le vecteur nul $\boldsymbol{0}$ n'appartient pas à V.

b) Il s'agit bien d'un espace vectoriel (droite vectorielle).

c) Ce n'est pas un espace vectoriel, car pour un vecteur donné de V, son opposé n'appartient pas à V. De plus, le vecteur nul $\boldsymbol{0}$ n'appartient pas à V.

d) Il s'agit bien d'un espace vectoriel (plan vectoriel).

Exercice 2.6 : Un corrigé peut être vu à votre demande.

Exercice 2.7 : On a $(4 ; 3 ; 2) = -11(1 ; 2 ; 3) + 20(1 ; 1 ; 2) - 5(1 ; -1 ; 1)$

Exercice 2.8 : **a)** Les vecteurs $(1 ; 1)$ et $(2 ; 1)$ forment une suite génératrice, car on a $(x ; y) = (-x + 2y)(1 ; 1) + (x - y)(2 ; 1)$.

b) Elle n'est pas génératrice, seuls les vecteurs du type $(k ; k)$ peuvent être engendrés ($k \in \mathbb{R}$).

c) Elle n'est pas génératrice, seuls les vecteurs du type $(k ; 2k)$ peuvent être engendrés ($k \in \mathbb{R}$).

d) Le même raisonnement qu'en **b)** montre qu'elle n'est pas génératrice.

e) Elle est génératrice, car tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des 2 derniers vecteurs proposés.

f) Elle est génératrice, car $(x ; y) = \left(\dfrac{-3x+4y}{7}\right)(3 ; 4) + \left(\dfrac{4x-3y}{7}\right)(4 ; 3)$.

Exercice 2.9 : **a)** N'est pas génératrice.
b) N'est pas génératrice.
c) N'est pas génératrice.
d) Est génératrice.
e) Est génératrice.
f) Est génératrice.

Exercice 2.10 : *A propos de l'exercice 8 :*

a) Les vecteurs $(1 ; 1)$ et $(2 ; 1)$ forment une suite libre, car la seule solution de l'équation $\alpha_1(1 ; 1) + \alpha_2(2 ; 1) = (0 ; 0)$ est $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

b) Les vecteurs $(1 ; 1)$ et $(3 ; 3)$ ne forment pas une suite libre, car:
$$-3(1 ; 1) + (3 ; 3) = (0 ; 0).$$

c) La partie $\{(1 ; 2)\}$ est libre, car $\alpha_1 = 0$ est l'unique solution de l'équation:
$$\alpha_1(1 ; 2) = (0 ; 0).$$

d) La partie $\{(0 ; 0), (2 ; 3)\}$ n'est pas libre, car $1(0 ; 0) + 0(2 ; 3) = (0 ; 0)$.

e) La partie $\{(1 ; 1), (0 ; 1), (1 ; 0)\}$ n'est pas libre, car:
$$(1 ; 1) - (0 ; 1) - (1 ; 0) = (0 ; 0).$$

f) La partie $\{(3 ; 4), (4 ; 3)\}$ est libre, car la seule solution de l'équation:
$$\alpha_1(3 ; 4) + \alpha_2(4 ; 3) = (0 ; 0) \text{ est } \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

À propos de l'exercice 9

a) N'est pas libre. **b)** Est libre.
c) N'est pas libre. **d)** N'est pas libre.
e) Est libre. **f)** Est libre.

Exercice 2.11 : Les 3 affirmations sont vraies.

Exercice 2.12 : On peut montrer par exemple que :
$$(x^2 + 2x + 3) + 2(2x^2 - x - 5) - (3x^2 + x - 3) - (2x^2 - x - 4) = \boldsymbol{0}$$

Exercice 2.13 : Non, car $4f - 2g + h = 0$

Exercice 2.14 : **a)** La seule solution de l'équation $\alpha_1(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \alpha_2(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3) + \alpha_3(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{0}$ est: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

b) On a $-1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) + 1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3) - 1(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{0}$.

Exercice 2.15 : *Il s'agit d'exhiber la preuve dans les 2 sens ($\Rightarrow$) et ($\Leftarrow$).*

L'équation $\alpha_1(\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2 + \mu\boldsymbol{v}_3) + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \alpha_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ revient à l'équation $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + (\alpha_1\lambda + \alpha_2)\boldsymbol{v}_2 + (\alpha_1\mu + \alpha_3)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$. Si les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ sont libres, on aura donc $\alpha_1 = \alpha_1\lambda + \alpha_2 = \alpha_1\mu + \alpha_3 = 0$ et donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, ce qui montre que les 3 vecteurs $\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2 + \mu\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ sont libres.

De manière analogue, on montre que si les 3 vecteurs $\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2 + \mu\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ sont libres, alors les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ sont libres.

Exercice 2.16 : **a)** Oui, par exemple $ax+b=\left(\frac{2a-b}{3}\right)\boldsymbol{p}_1+\left(\frac{2b-a}{3}\right)\boldsymbol{p}_2+0\boldsymbol{p}_3 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

b) non, car $5\boldsymbol{p}_1 + 2\boldsymbol{p}_2 - 3\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{0}$

c) $\boldsymbol{p}_3 = \frac{5}{3}\boldsymbol{p}_1 + \frac{2}{3}\boldsymbol{p}_2$

Exercice 2.17 : $\boldsymbol{w} = \frac{3}{2}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2$

Exercice 2.18 : par exemple :

$\boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_4 \quad \Rightarrow$ On supprime $\boldsymbol{v}_3$.
$\boldsymbol{v}_4 = -\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 \quad \Rightarrow$ On supprime $\boldsymbol{v}_4$.
Ainsi la famille $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ est génératrice et libre.

Exercice 2.19 : **a)** C'est la base canonique de $\mathbb{P}_4$.
b) La suite est libre, mais non génératrice.
c) La suite n'est ni libre, ni génératrice.
d) C'est une base de $\mathbb{P}_4$.

Exercice 2.20 : **a)** La base canonique de V est formée des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

b) **(1)** N'est pas une base. **(2)** N'est pas une base. **(3)** Est une base.

Exercice 2.21 : **b)** 2 vecteurs ne peuvent suffire pour engendrer un EV de dim 3.
c) Par exemple $\boldsymbol{v}_3 = (6 ; -3 ; 1)$.

Exercice 2.22 : **a)** C'est une application facile de la définition d'espace vectoriel.
b) La famille $\{1 ; x ; x^2 ; \ldots ; x^n\}$ est une base de $\mathbb{P}_n$. La dimension de $\mathbb{P}_n$ est donc $n + 1$.

Exercice 2.23 : La dimension de V est 4, car:
V contient une famille libre de 4 éléments $\Rightarrow$ $\dim(V) \geq 4$ et
V contient une famille génératrice de 4 éléments $\Rightarrow$ $\dim(V) \leq 4$.

Exercice 2.24 : L'espace vectoriel $\mathcal{F}([a ; b])$ est de dimension infinie (!!).

Exercice 2.25 : **a)** $z_3 = \frac{-1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2$

b) $\forall\, \boldsymbol{z} = a + b\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{z} = \left(-\frac{a}{10} - \frac{2b}{5}\right)z_1 + \left(\frac{3a}{10} + \frac{b}{5}\right)z_2$

c) $\dim(\mathcal{F}) = 2$.

Exercice 2.26 : A est un sous-espace vectoriel. Une base de A est $(1 ; 0)$ et sa dimension est 1.

B n'est pas un sous-espace vectoriel, car $(0 ; 0) \notin B$.

C est un sous-espace vectoriel. On peut considérer que sa base est l'ensemble vide et ainsi, sa dimension est de 0.

D n'est pas un sous-espace vectoriel, car $(0 ; 0) \notin D$.

E est un sous-espace vectoriel. Une base est donnée par le vecteur $(1 ; -2)$. Sa dimension est 1.

F n'est pas un sous-espace vectoriel, car $(0 ; 0) \notin F$.

G est un sous-espace vectoriel. Une base est donnée par le vecteur $(1 ; 2)$. Sa dimension est 1.

H est un sous-espace vectoriel, car $H = \mathbb{R}^2$.

Exercice 2.27 : A est un sous-espace vectoriel. Une base de A est $(0 ; 1 ; 0)$ et sa dimension est 1.

B n'est pas un sous-espace vectoriel car $(0 ; 0 ; 0) \notin B$.

C est un sous-espace vectoriel. Une base est formée des vecteurs $(1 ; 0 ; 1)$ et $(0 ; 1 ; 1)$. Sa dimension est donc 2.

D n'est pas un sous-espace vectoriel car $(0 ; 0 ; 0) \notin D$.

E est un sous-espace vectoriel.
Si $a = b = c = 0$, c'est $\mathbb{R}^3$ et sa dimension est 3.
Si $a \neq 0$, une base de E est formée des vecteurs $(-b ; a ; 0)$ et $(-c ; 0 ; a)$.
Si $b \neq 0$, une base de E est formée des vecteurs $(b ; -a ; 0)$ et $(0 ; -c ; b)$.
Si $c \neq 0$, une base de E est formée des vecteurs $(c ; 0 ; -a)$ et $(0 ; c ; -b)$.
Dans ces derniers cas, la dimension de E est 2.

F n'est pas un sous-espace vectoriel car $(0 ; 0 ; 0) \notin F$.

Exercice 2.28 : Si les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_4$ étaient tous les deux nuls, la famille $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ ne serait pas génératrice dans $\mathbb{R}^3$.

La dimension 0 est impossible.

La dimension est 1 si $\boldsymbol{v}_1 = (1 ; 0 ; 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0 ; 1 ; 0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0 ; 0 ; 1)$ et $\boldsymbol{v}_4 = (1 ; 0 ; 0)$.

La dimension est 2 si $\boldsymbol{v}_1 = (1 ; 0 ; 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0 ; 1 ; 0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0 ; 0 ; 1)$ et $\boldsymbol{v}_4 = (0 ; 1 ; 0)$.

Exercice 2.29 : La famille est liée car $(2 ; 10 ; -7 ; 4) = 5(1 ; 2 ; -1 ; 0) + (-3 ; 0 ; -2 ; 4)$. La dimension de l'espace engendré par cette famille est 2 car les deux premiers vecteurs sont libres. On obtient une base de $\mathbb{R}^4$ en ajoutant les vecteurs $(0 ; 0 ; 1 ; 0)$ et $(0 ; 0 ; 0 ; 1)$.

Exercice 2.30 : On obtient $a = -19$ et $b = -16$

Exercice 2.31 : **a)** On montre facilement que la famille est libre. Comme elle comporte 3 éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) La dimension est 2 et une base est formée des vecteurs (2 ; 1 ; -1) et (3 ; 2 ; 1). On a (1 ; 0 ; -3) = 2(2 ; 1 ; -1) – (3 ; 2 ; 1).

Exercice 2.32 : **a)** Soit $f(x)$ tel que $f(x) = f(-x)$ et $g(x)$ tel que $g(x) = g(-x)$.

- $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$ ok !!
- $(\alpha \cdot f)(-x) = \alpha \cdot f(-x) = \alpha \cdot f(x) = (\alpha \cdot f)(x)$ ok !!

b) Cela forme également un SEV. Même démarche

Exercice 2.33 : **a)** Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions dérivables sur $[a\,;\,b]$.

- $(f+g)'(x) = (f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) = (f'+g')(x)$ ok !!
- $(\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)$ ok !!

Exercice 2.34 : **a)** Une base est formée des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ dim = 2.

b) N'est pas un sous-espace vectoriel, car la matrice nulle n'appartient pas à cet ensemble.

c) Une base est formée des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ dim = 3.

Exercice 2.35 : Soit $\boldsymbol{v}^* \in V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow v^* \in V_1$ et $v^* \in V_2$
Soit $\boldsymbol{v}' \in V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow$ …………………

- $\boxed{\textit{Montrons que } v^* + v' \in V_1 \cap V_2}$

Comme V_1 a une structure d'espace vectoriel, $v^* + v' \in V_1$
De même dans V_2.
Ainsi $v^* + v' \in V_1$ et $v^* + v' \in V_2$ donc $v^* + v' \in V_1 \cap V_2$.

- $\boxed{\textit{Montrons que } \alpha \cdot v^* \in V_1 \cap V_2}$

Même idées.

Exercice 2.36 : sans corrigé.

Exercice 2.37 : **a)** dim(S) = 2, base : ((3 ; 1 ; 0) ; (-1 ; 0 ; 1))
b) dim(S) = 1, base : ((4 ; -5 ; 1))

Exercice 2.38 : **a)** Faux. **b)** Vrai. **c)** Vrai.
d) Faux, il s'agit de la base **ordonnée** :
((1 ; 0 ; 0 ; 0), (0 ; 1 ; 0 ; 0), (0 ; 0 ; 1 ; 0), (0 ; 0 ; 0 ; 1)).

QUELQUES REPONSES AUX EXERCICES

$3M_{renf}$ – Jt 2022

Éléments de réponses Chapitre 3:

Exercice 3.1 : Un corrigé sera vu à votre demande

Exercice 3.2 :
a) T est linéaire
b) T n'est pas linéaire car par exemple $T(2(1\ ;\ 1)) \neq 2T(1\ ;\ 1)$
c) T est linéaire
d) T n'est pas linéaire car $T(0\ ;\ 0) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$
e) T n'est pas linéaire car par exemple $T(2(0\ ;\ \pi/2)) \neq T(0\ ;\ \pi)$

Exercice 3.3 : soit $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Il s'agit donc de vérifier que :

$$(f+g)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = (f+g)(\boldsymbol{u}) + (f+g)(\boldsymbol{v}) \quad \text{et} \quad (f+g)(\alpha\cdot\boldsymbol{u}) = \alpha\cdot(f+g)(\boldsymbol{u})$$

Ce qui s'obtient comme chaines d'égalités :

$$\begin{aligned}(f+g)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{u}) + g(\boldsymbol{v})\\ &= \big(f(\boldsymbol{u}) + g(\boldsymbol{u})\big) + \big(f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v})\big) = (f+g)(\boldsymbol{u}) + (f+g)(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f+g)(\alpha\cdot\boldsymbol{u}) &= f(\alpha\cdot\boldsymbol{u}) + g(\alpha\cdot\boldsymbol{u}) = \alpha\cdot f(\boldsymbol{u}) + \alpha\cdot g(\boldsymbol{u})\\ &= \alpha\cdot\big(f(\boldsymbol{u}) + g(\boldsymbol{u})\big) = \alpha\cdot(f+g)(\boldsymbol{u})\end{aligned}$$

Exercice 3.4 : Quelques soient f et $g \in \mathcal{D}([a\ ;\ b])$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
a) Oui, car :

$$\begin{aligned}T(f+g) &= 2(f+g) = 2f + 2g = T(f) + T(g)\\ T(\alpha\cdot f) &= 2(\alpha\cdot f) = \alpha\cdot(2f) = \alpha\cdot T(f)\end{aligned}$$

b) Oui, il s'agit à nouveau de constituer 2 chaînes d'égalités :

$$T(f+g) = \ldots = T(f) + T(g) \quad \text{et} \quad T(\alpha\cdot f) = \ldots = \alpha\cdot T(f)$$

c) Oui **d)** Non

Exercice 3.5 :
a) $(1\ ;\ 2\ ;\ -3) = -3(3\ ;\ 2\ ;\ 1) + 2(5\ ;\ 4\ ;\ 0)$
b) $T(1\ ;\ 2\ ;\ -3) = T(-3(3\ ;\ 2\ ;\ 1) + 2(5\ ;\ 4\ ;\ 0)) = -3T(3\ ;\ 2\ ;\ 1) + 2T(5\ ;\ 4\ ;\ 0)$
$= -3(5\ ;\ 4\ ;\ 0) + 2(3\ ;\ 2\ ;\ 1) = (-9\ ;\ -8\ ;\ 2)$

Exercice 3.6 : Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont tels que $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots \alpha_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$, alors :

$$T(\boldsymbol{0}) = T(\alpha\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n) = \alpha_1 T(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + \alpha_n T(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}.$$

On a donc $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$

Exercice 3.7 : La matrice représentant T est $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$

QUELQUES REPONSES AUX EXERCICES

Exercice 3.8 : **a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ **e)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$

Exercice 3.9 : **a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **b)** $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Exercice 3.10 : **a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Exercice 3.11 : **a)** ${}_eA_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ **b)** ${}_{e'}A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Exercice 3.12 : **a)** ${}_fA_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$ **b)** $L(1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5) = (1\ ;\ -14\ ;\ 9)$

Exercice 3.13 : La matrice représentant cette symétrie est : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Exercice 3.14 : **a)** $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. *Déjà vu en théorie, mais vous devez être capable de le refaire.*

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1\\ 6 & -2\end{pmatrix}$

Exercice 3.15 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

Exercice 3.16 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$3M_{renf}$ – Jt 2022

Exercice 3.17 : **a)** $M = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

b) Que pouvez-vous affirmer au sujet des positions respectives des images des 3 vecteurs de base ?

Exercice 3.18 : **a)** $M = \begin{pmatrix} 3/7 & 6/7 & -2/7 \\ 6/7 & -2/7 & 3/7 \\ -2/7 & 3/7 & 6/7 \end{pmatrix}$ **b)** $M^2 = Id_3$

Exercice 3.19 : **a)** Peut être vu ensemble (à votre demande)

b) ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) M est inversible $\Leftrightarrow \det(M) \neq 0$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Il s'agit de résoudre $M \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 4x + 1$

Exercice 3.20 : **a)** En considérant comme base canonique de $\mathbb{C}$: $\mathcal{B} = (1\,;\boldsymbol{i})$:

$${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $\left({}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}\right)^3 = M^3 = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Il s'agit de résoudre $M^3 \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \left(M^3\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\boldsymbol{i}$

Exercice 3.21 : Un corrigé sera vu à votre demande

QUELQUES REPONSES AUX EXERCICES

Exercice 3.22 : **a)** et **b)** $U \circ T = T \circ U = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

c) non, par exple si T est la même rotation et U la projection sur Ox, alors $U \circ T \neq T \circ U$

Exercice 3.23 : Un corrigé sera vu à votre demande

Exercice 3.24: $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 & -1 \\ \sqrt{6} & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ou $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 3 & -1 \\ -\sqrt{6} & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 3.25 : **b)** ${}_{e}Id_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, ${}_{e''}Id_{e} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ${}_{e''}Id_{e'} = {}_{e''}Id_{e} \cdot {}_{e}Id_{e'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

c)

- $\boldsymbol{v}_{e'} = {}_{e'}Id_{e} \cdot \boldsymbol{v}_{e} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 7/5 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{v}_{e''} = {}_{e''}Id_{e} \cdot \boldsymbol{v}_{e} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$

  ou $\boldsymbol{v}_{e''} = {}_{e''}Id_{e'} \cdot \boldsymbol{v}_{e'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4/5 \\ 7/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{w}_{e} = {}_{e}Id_{e'} \cdot \boldsymbol{w}_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{u}_{e'} = {}_{e'}Id_{e''} \cdot \boldsymbol{u}_{e''} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ -1 & 4/3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 \\ 3/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}$

Exercice 3.26: **a)** ${}_{e}A_{e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ${}_{f}A_{f} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

b) ***1ère méthode :***

$$\left.\begin{array}{l} T(3\,;1) = (1\,;-2\,;-5) = 1 \cdot \boldsymbol{f}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{f}_2 - 2 \cdot \boldsymbol{f}_3 \\ T(5\,;2) = (2\,;1\,;-3) = 3 \cdot \boldsymbol{f}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{f}_2 - 1 \cdot \boldsymbol{f}_3 \end{array}\right\} \Rightarrow {}_{f}A_{e} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$3M_{renf}$ – Jt 2022

Exercice 3.26: **b)** ***2ème méthode :***

$${}_fA_e = {}_fId_{canonique} \cdot {}_{canonique}A_{canonique} \cdot {}_{canonique}Id_e$$

$${}_fA_e = \left({}_{canonique}Id_f\right)^{-1} \cdot {}_{canonique}A_{canonique} \cdot {}_{canonique}Id_e$$

$${}_fA_e = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 13 \\ -7 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.27 : $${}_uL_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

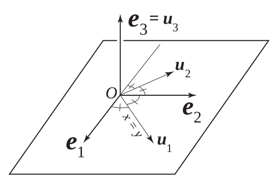
Exercice 3.28 : **a)** $T(1\,;0) = (-5/4\,; -3/4)$ et $T(0\,;1) = (3/4\,; 5/4)$ donc $A = \begin{pmatrix} -5/4 & 3/4 \\ -3/4 & 5/4 \end{pmatrix}$

b) $$\left.\begin{array}{lcl} \boldsymbol{u}_1 = (1\,;3) & \Rightarrow & T(1;3) = (1;3) \\ \boldsymbol{u}_2 = (3\,;1) & \Rightarrow & T(3;1) = (-3;-1) \end{array}\right\} \Rightarrow {}_uT_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}_eId_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}_fId_e = \begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 \end{pmatrix}$$

$${}_eT_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/4 & 3/4 \\ -3/4 & 5/4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.29 : *Indication : Je vous propose de travailler sur cette figure, mais de ne pas lire la suite de la résolution avant la fin de la vôtre.*



Exercice 3.29 : Les 3 matrices à considérer sont :

$${}_eId_u = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}_uId_e = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $${}_uT_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ pour finalement obtenir :

$${}_eT_e = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.30 : Un corrigé sera vu à votre demande

Exercice 3.31 :

a) **2)** Ker(T) : axe Oy, Im(T) : axe Ox
3) dim Ker(T) = dim Im(T) = 1

b) **2)** Ker(T) : l'origine O, Im(T) : $\mathbb{R}^2$
3) dim Ker(T) = 0 et dim Im(T) = 2

c) **2)** Ker(T) : l'origine, Im(T) : $\mathbb{R}^3$
3) dim Ker(T) = 0 et dim Im(T) = 3

d) **2)** Ker(T) : axe Ox, Im(T) : Plan Oyz
3) dim Ker(T) = 1 et dim Im(T) = 2

4) Il semblerait que dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim (Espace vect)

Exercice 3.32 :

a) Ker(T) = $\{(t\,; -t\,; 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est de dimension 1. Une base est donnée par (1 ; -1 ; 0)

b) Ker(T) = $\{(0\,; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est de dimension 1.
Une base est donnée par (0 ; 1)

c) Ker(T) = $\{\boldsymbol{0}\}$ = {(0 ; 0)} est de dimension 0. Pas de base

d) Ker(T) = $\{\boldsymbol{0}\}$ = {(0 ; 0)} est de dimension 0. Pas de base

e) Ker(T) = $\{(t\,; -2t\,; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est de dimension 1.
Une base est donnée par (1 ; -2 ; 1)

Exercice 3.33 :

1) **a)** T est ni injective, ni surjective.
b) T est injective et surjective donc bijective.
c) T est injective et surjective donc bijective.
d) T est ni injective, ni surjective.

2) **a)** T n'est pas injective mais est surjective.
b) T est ni injective, ni surjective.
c) T est injective et surjective donc bijective.
d) T est injective et non surjective.
e) T est ni injective, ni surjective.

Exercice 3.34 : **a)** $\{(-7 ; 3 ; 1)\}$

b) $A\cdot\begin{pmatrix}-7\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

c) A^2 représente $F\circ F$. Comme $F(F(x))=0$, $A^2=0$

Exercice 3.35 :
a) $F(1 ; 2 ; 3) = (1 ; 1 ; 2)$
b) $\mathrm{Ker}(F) = \{(0 ; t ; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
c) Les solutions de $A\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ sont de la forme $(\alpha ; \alpha ; \beta)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et il est facile de voir que $\mathrm{Im}(F) = \{(\alpha ; \alpha ; \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
d) C'est la projection sur le plan d'équation $x_1 = x_2$ parallèlement à la droite d'équations $\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

Exercice 3.36 :
a) rang = 2
b) $\mathrm{Ker}(L_A) = \{\alpha\cdot(2 ; 0 ; 1 ; 0) + \beta\cdot(0 ; -1 ; 0 ; 3) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ et $\dim \mathrm{Ker}(L_A) = 2$
c) $\mathrm{Im}(L_A) = \{\alpha\cdot(0 ; 0 ; 1) + \beta\cdot(1 ; 0 ; 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ et $\dim \mathrm{Im}(L_A) = 2$

Exercice 3.37 :
a) $k \neq 1$ et $k \neq -2$
b) $k = -2$
c) $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = (1/2 ; 1/2 ; -1/2)$

Exercice 3.38 : **a)** $\dim \mathrm{Ker}(F) = 2$

b) impossible car $\begin{cases}\dim \mathrm{Ker}(T)+\dim \mathrm{Im}(T)=3\\ \dim \mathrm{Ker}(T)=\dim \mathrm{Im}(T)\end{cases}$ n'admet pas de sol entière

c) injective donc $\dim \mathrm{Ker}(R) = 0$ donc $\dim \mathrm{Im}(R) = 3$

Exercice 3.39 : $\mathrm{Ker}(T) = 0$

Exercice 3.40 : non car $\dim \mathrm{Im}(A) = 1$ donc $\dim \mathrm{Ker}(A) = 1$ donc A non injective.

QUELQUES REPONSES AUX EXERCICES

Exercice 3.41 : Un corrigé sera vu à votre demande

Exercice 3.42 : **a)** rang A = rang $A^T = 2$ **b)** rang B = rang $B^T = 3$
c) rang C = rang $C^T = 3$ **d)** rang D = rang $D^T = 1$

Exercice 3.43 : Si $\lambda = -20$ alors rang $A = 3$, sinon rang $A = 4$

Exercice 3.44 : **a)** $\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ **b)** rang $A = 3$ **c)** dimension de l'image vaut 3

d) dimension du noyau vaut 1 **e)** une base est $(-2 ; 0 ; 0 ; 1)$

Exercice 3.45 : **a)** $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, la transformation inverse n'existe pas (elle n'est pas bijective)

b) $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$, les 2 matrices sont inverses, $AB = BA = \mathrm{Id}$

c) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, les 2 matrices sont inverses

d) $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, la transformation inverse n'existe pas (elle n'est pas bijective)

Exercice 3.46 : **a)** A est inversible si et seulement si $\lambda \neq -1$ et

$$A^{-1}=\frac{1}{1+\lambda^3}\begin{pmatrix}-\lambda&1&\lambda^2\\1&\lambda^2&-\lambda\\\lambda^2&-\lambda&1\end{pmatrix}$$

b) B est toujours inversible et $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\lambda&\lambda^2&-\lambda^3\\0&1&-\lambda&\lambda^2\\0&0&1&-\lambda\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

Éléments de réponses Chapitre 4:

Exercice 4.1 :

a) Oui, un vecteur propre $\boldsymbol{v} = (-2\ ;\ 1)$.
Remarquons que n'importe quel multiple de ce vecteur est aussi un vecteur propre.

b) Non.

c) Oui, un vecteur propre $\boldsymbol{v} = (1\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

Exercice 4.2 :

a) Tous les vecteurs vont subir cette rotation d'angle θ. Ainsi donc, $\boldsymbol{v}$ et $\mathcal{R}(\boldsymbol{v})$ ne seront jamais colinéaires, car l'angle entre ces 2 vecteurs = θ.

b) Tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont des vecteurs propres. La valeur propre associée est de -1. *Il s'agit en fait d'une symétrie centrale dont le centre est l'origine ou encore d'une homothétie de rapport –1.*

b) Tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont des vecteurs propres. La valeur propre associée est de 1. *Il s'agit en fait de l'identité.*

Exercice 4.3 :

a) Il s'agit de créer une chaîne d'égalités : $L(\alpha\boldsymbol{v}) = \ldots\ldots\ldots = \lambda(\alpha\boldsymbol{v})$.

b) Il s'agit de créer une chaîne d'égalités : $L(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \ldots\ldots\ldots = \lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$.

c) Et de conclure ici que : $L(\boldsymbol{w}) = \ldots\ldots\ldots = \lambda(\boldsymbol{w})$.

Exercice 4.4 :

a)
- Valeur propre $\lambda = 1$, vecteur propre associé $\boldsymbol{v} = (0\ ;\ 1)$,
  espace propre $V_{\lambda=1} = \{(0\ ;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ = axe Oy.
- Valeur propre $\lambda = -1$, vecteur propre associé $\boldsymbol{v} = (1\ ;\ 0)$,
  espace propre $V_{\lambda=-1} = \{(t\ ;\ 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ = axe Ox.

b)
- Valeur propre $\lambda = 1$, vecteur propre associé $\boldsymbol{v} = (1\ ;\ 1)$,
  espace propre $V_{\lambda=1} = \{(t\ ;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ = droite d'équation $x - y = 0$.
- Valeur propre $\lambda = 0$, vecteur propre associé $\boldsymbol{w} = (-1\ ;\ 1)$,
  espace propre $V_{\lambda=0} = \{(-t\ ;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ = droite d'équation $x + y = 0$.

c)
- Valeur propre $\lambda = 1$, vect. propres associés $\boldsymbol{v} = (0\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $\boldsymbol{w} = (0\ ;\ 0\ ;\ 1)$
  espace propre $V_{\lambda=1} = \{(0\ ;\ t\ ;\ u) \mid t \text{ et } u \in \mathbb{R}\}$ = plan Oyz.
- Valeur propre $\lambda = 0$, vecteur propre associé $\boldsymbol{s} = (1\ ;\ 0\ ;\ 0)$,
  espace propre $V_{\lambda=0} = \{(t\ ;\ 0\ ;\ 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ = axe Ox.

d)
- Valeur propre $\lambda = 1$, vect. propres associés $\boldsymbol{v} = (1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $\boldsymbol{w} = (0\ ;\ 0\ ;\ 1)$
  espace propre $V_{\lambda=1} = \{(t\ ;\ 0\ ;\ u) \mid t \text{ et } u \in \mathbb{R}\}$ = plan Oxz.
- Valeur propre $\lambda = -1$, vecteur propre associé $\boldsymbol{s} = (0\ ;\ 1\ ;\ 0)$,
  espace propre $V_{\lambda=-1} = \{(0\ ;\ t\ ;\ 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ = axe Oy.

e)
- Valeur propre $\lambda = 1$, vect. propres associés $\boldsymbol{v} = (1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $\boldsymbol{w} = (0\ ;\ 1\ ;\ 1)$
  espace propre $V_{\lambda=1} = \{(t\ ;\ u\ ;\ u) \mid t \text{ et } u \in \mathbb{R}\}$ = plan d'équation $y - z = 0$.
- Valeur propre $\lambda = 0$, vecteur propre associé $\boldsymbol{s} = (0\ ;\ 1\ ;\ -1)$,
  espace propre $V_{\lambda=0} = \{(0\ ;\ t\ ;\ -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4.5 :

a) $V_{\lambda=1} = \{(0\ ;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ de base $\{(0\ ;\ 1)\}$
$V_{\lambda=5} = \{(2t\ ;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ de base $\{(2\ ;\ 1)\}$

b) $V_{\lambda=-2} = \{(t\ ;\ t\ ;\ 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ de base $\{(1\ ;\ 1\ ;\ 3)\}$

c) $V_{\lambda=3} = \{(-2t - 3u\ ;\ t\ ;\ u) \mid t \text{ et } u \in \mathbb{R}\}$ de base $\{(-2\ ;\ 1\ ;\ 0)\ ;\ (-3\ ;\ 0\ ;\ 1)\}$
$V_{\lambda=8} = \{(t\ ;\ -t\ ;\ 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ de base $\{(1\ ;\ -1\ ;\ 2)\}$

Exercice 4.6 :

a) $\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ *par exemple*

$S = \{(-7t\ ;\ 13t\ ;\ 5t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

b) la 3ème ligne peut s'écrire comme combinaison linéaire des 2 premières. On se retrouve alors avec 2 équations pour 3 inconnues.

c) Det $(A) = 0$ car on peut ramener la matrice à une matrice contenant une ligne de zéro et développer son déterminant par rapport à cette ligne.

Exercice 4.7 :

a) $\lambda^2 - 4\lambda - 45 = 0$ $\quad\lambda = 9$ et $\lambda = -5$

b) $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ $\quad\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$

c) $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ $\quad\lambda = 3$ (de multiplicité 2)

d) $\lambda^2 - 9\lambda + 32 = 0$ $\quad$ pas de valeur propre réelle (mais des complexes !!)

Exercice 4.8 : L'équation caractéristique de cet endomorphisme est $\lambda^2 + 1 = 0$, n'admettant aucune valeur propre réelle donc pas de vecteur propre

Exercice 4.9 :

a) $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$ $\quad\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ (de multiplicité 2)

b) $-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$ *(à factoriser avec le truc du reste)*
$\lambda = 1$ et $\lambda = -2$ (de multiplicité 2)

Exercice 4.10 :

a) $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$

b) $\lambda = 0$ de multiplicité 1, $\lambda = 1$ de multiplicité 2.

c) $V_{\lambda=0} = \{t \cdot (-1\ ;\ 1\ ;\ 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ droite vectorielle de dim 1.
$V_{\lambda=1} = \{t \cdot (-2\ ;\ 1\ ;\ 0) + u \cdot (1\ ;\ 0\ ;\ 1) \mid t \text{ et } u \in \mathbb{R}\}$ plan vectoriel de dim 2.

d) Il s'agit d'une projection sur le plan $x + 2y - z = 0$ (espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$) de direction $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$).

Exercice 4.11 : Il suffit d'observer le degré de l'équation caractéristique à résoudre

Exercice 4.12 : Les valeurs propres d'une matrice triangulaire correspondent aux éléments diagonaux de cette matrice, ici : a_{11}, a_{22}, a_{33}

Exercice 4.13 : Les valeurs propres de cette matrice triangulaire sont:
$\lambda_1 = -1$ *(de multiplicité 2)* et $\lambda_2 = 2$.

Exercice 4.14 :

a) $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

b) $\lambda = -1$ de multiplicité 1, $\lambda = 1$ de multiplicité 2.

c) $V_{\lambda=-1} = \{t\cdot(1 ; 1 ; -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ droite vectorielle de dimension 1.
$V_{\lambda=1} = \{t\cdot(1 ; -1 ; 0) + u\cdot(1 ; 0 ; 1) \mid t \text{ et } u \in \mathbb{R}\}$ plan vectoriel de dimension 2.

d) Il s'agit d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $x + y - z = 0$.

Exercice 4.15 :

Il s'agit d'une symétrie oblique par rapport au plan $z = 0$ (espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$) de direction $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -1$).

Exercice 4.16 :

a) La matrice est triangulaire donc $\lambda = 2$ de multiplicité 3.

b) $V_{\lambda=2} = \{t\cdot(1 ; 0 ; 0) + u\cdot(0 ; 1 ; 0) + v\cdot(0 ; 0 ; 1) \mid t, u \text{ et } v \in \mathbb{R}\}$
Il s'agit donc de $\mathbb{R}^3$ lui-même. En fait, tout vecteur est vecteur propre.

c) Les résultats précédents correspondent bien à ce que l'on attend de la transformation géométrique qui est une homothétie de rapport 2.

Exercice 4.17 :

a) $\lambda = 5$ de multiplicité 1 et $\lambda = -3$ de multiplicité 2.

b) $V_{\lambda=5} = \{t\cdot(-1 ; -2 ; 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$V_{\lambda=-3} = \{t\cdot(-2 ; 1 ; 0) + u\cdot(3 ; 0 ; 1) \mid t, u \in \mathbb{R}\}$

c) Si l'on considère la base formée par les vecteurs propres ordonnés selon les réponses **a)** et **b)** on a $A_{propre} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.18 :

a) $4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 3\lambda = 0$

b) $\lambda = 0$, $\lambda = -1/2$, $\lambda = -3/2$

c) La base e' est constituée des vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives :
$$e' = ((1 ; 1 ; -1) ; (1 ; 1 ; -2) ; (1 ; -1 ; 0))$$

d) ${}_{e}Id_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad {}_{e'}Id_{e} = \left({}_{e}Id_{e'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

On peut contrôler que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

e) $\left({}_{e'}A_{e'}\right)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3/2)^n \end{pmatrix}$

$\left({}_{e}A_{e}\right)^n = \left({}_{e}Id_{e'} \cdot {}_{e'}A_{e'} \cdot {}_{e'}Id_{e}\right) \cdot \ldots \cdot \left({}_{e}Id_{e'} \cdot {}_{e'}A_{e'} \cdot {}_{e'}Id_{e}\right) = {}_{e}Id_{e'} \cdot {}_{e'}A^{n}_{e'} \cdot {}_{e'}Id_{e}$

f) $\left({}_{e'}A_{e'}\right)^6 = {}_{e}Id_{e'} \cdot {}_{e'}A^{6}_{e'} \cdot {}_{e'}Id_{e} = \begin{pmatrix} 91/16 & -365/64 & -1/64 \\ -365/64 & 91/16 & -1/64 \\ 1/64 & 1/64 & 1/32 \end{pmatrix}$

Exercice 4.19 :

a) $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ $\qquad \lambda = -1,\ \lambda = 1$
$V_{\lambda=-1} = \{t\cdot(3 ; -3 ; 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$V_{\lambda=1} = \{t\cdot(1 ; 1 ; 0) + u\cdot(-1 ; 0 ; 3) \mid t \text{ et } u \in \mathbb{R}\}$

b) ${}_{e'}H_{e'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}_{e}Id_{e'} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, ${}_{e'}Id_{e} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 9 & 10 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 9 & 10 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & 18 & -6 \\ 18 & 1 & 6 \\ -6 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

c) Les images des vecteurs de la base canonique correspondent aux 3 colonnes de la matrice ${}_{e}H_{e}$. Ces 3 vecteurs sont bien orthogonaux entre eux et de norme 1.

d) Il s'agit de la symétrie orthogonale vectorielle de direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.20 :

a) $\lambda = 1,\ \lambda = -1$

b) ${}_{e'}A_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ par rapport à la base $e' = ((2 ; 1) ; (1 ; -2))$

c) ${}_{e}Id_{e'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, ${}_{e'}Id_{e} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

d) ${}_{e}A_{e} = {}_{e}Id_{e'} \cdot {}_{e'}A_{e'} \cdot {}_{e'}Id_{e} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Bibliographie et livres de référence:

1. Camille Debière, Yves Félix, *Algèbre linéaire pour HEC et ingénieurs commerciaux*, De Boeck Université, 2000

2. Howard Anton, *Elementary linear algebra (7 edition)*, John Wiley & Sons, Inc, 1994

3. Lay, *Algèbre linéaire, théorie, exercices & applications*, De Boeck, 2004

4. Amaudruz Sylvain, *Algèbre linéaire 3MR*, Gymnase du Bugnon, 2010

5. Hubert Bovet, *Algèbre linéaire*, Polymaths, 2014