La droite et le cercle dans le plan métrique

(Géométrie analytique)

$2M_{\text{Stand}}$ - $3M_{\text{Stand}}$

Jean-Philippe Javet

www.javmath.ch

Table des matières

Malgré le soin apporté lors de sa conception, le polycopié que vous avez entre les mains contient certainement quelques erreurs et coquilles. Merci de participer à son amélioration en m'envoyant un mail :

`javmath.ch@gmail.com`

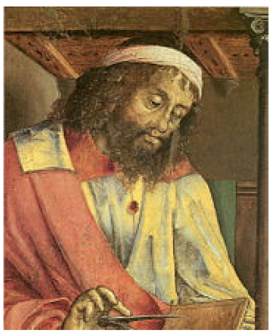
Merci ;-)

0

Introduction à la géométrie analytique

0.1 Introduction

"Les 3 géométries":



Euclide
env. -325 – env. -265

La **géométrie euclidienne** porte sur l'étude de figures du plan (droites, cercles, triangles, etc.). Les théorèmes sont démontrés en procédant par déduction à partir de certains postulats.

La **géométrie vectorielle** porte sur l'étude des vecteurs (défini par une direction, un sens et une mesure). L'introduction de cet outil mathématique permet en particulier de contrôler l'alignement de points, le parallélisme ou la perpendicularité de droites, de déterminer les coordonnées de points particuliers, de distance entre deux points, de calculer des angles...

En **géométrie analytique**, les figures géométriques planes sont étudiées en introduisant des systèmes de coordonnées, puis en utilisant des équations et des formules.

En fait, il s'agit ici de réaliser le « rêve de Descartes », c'est-à-dire de remplacer les démonstrations basées sur des raisonnements géométriques par des calculs en utilisant les coordonnées cartésiennes. Descartes proposait dans ses ouvrages « Règles pour la direction de l'esprit » et « Discours de la méthode », la démarche suivante :

- *"Ramener" d'abord tout problème à un problème de mathématique.*
- *"Ramener" ensuite tout problème mathématique à un problème d'algèbre.*
- *"Ramener" enfin tout problème d'algèbre à la résolution d'équations.*

René Descartes
1596 – 1650

Nous étudierons (chapitre 1 à 3) du cas des droites, triangles, droites particulières du triangle et cercles dans le plan. Le chapitre 4 (pour le niveau renforcé) nous permettra d'étudier les plans et les sphères dans l'espace.
Dans le plan, comme dans l'espace, il s'agira avant tout de calculs de type algébrique.

L'outil de départ pour introduire les nouvelles notions de géométrie analytique est obligatoirement la géométrie vectorielle. Ceci justifie ce chapitre 0. À l'aide de celui-ci, vous devrez au plus vite vous rafraîchir la mémoire sur les notions importantes de géométrie vectorielle.

Savoir faire en géométrie vectorielle plane $1\mathrm{M}_{\mathrm{stand}}$ (à compléter) :

Questions	**De mémoire**	**Dans le polycopié**	**n° des pages**
• Comment est caractérisé un vecteur ?			
• Règle Chasles ?			
• Quelles différences entre composantes et coordonnées ?			
• Comment déterminer si deux vecteurs sont colinéaires ? (2 méthodes)			
• $A(2\,;5)$; $B(3\,;8)$ et $C(-2\,;-7)$ sont-ils alignés ?			

Questions	**De mémoire**	**Dans le polycopié**	**n° des pages**
• Comment déterminer le milieu du segment défini par $A(3\,;6)$ et $B(-5\,;-4)$?			
• Comment déterminer le centre de gravité d'un triangle donné par ses 3 sommets ?			
• $A(2\,;3)$; $B(5\,;2)$; $C(-1\,;-1)$ et $D(1\,;-2)$. $ABCD$ est-il un parallélogramme ?			
• $A(8\,;-3)$ et $B(5\,;7)$. Que vaut $\\|\overrightarrow{AB}\\|$?			
• Les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont-ils perpendiculaires ?			
• Déterminer l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$			

Questions	**De mémoire**	**Dans le polycopié**	**n° des pages**
• Comment calculer l'aire d'un parallélogramme $ABCD$?			
•			
•			
•			
•			

1

Équations de la droite dans le plan

1.1 Introduction

Exercice d'intro: On considère l'équation vectorielle : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Représenter, dans un système d'axes Oxy, les points $(x\,;y)$ correspondant aux valeurs du paramètre :

$$k = -3\,; -2\,; -1\,; 0\,; 1\,; 2\,; 3.$$

➢ Par exemple, si $k = 4$, alors on obtient :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

On représente alors le point $P(9\,;10)$.

Vous devriez constater que tous les points obtenus sont situés sur une même droite. Nous allons maintenant caractériser les droites dans le plan par leurs équations.

1.2 Équation vectorielle paramétrique de la droite

La droite «vectorielle»:

- Une droite d est entièrement caractérisée par l'un de ses points $A(a_1\,;a_2)$ et un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ définissant son orientation.
- Ce vecteur $\vec{v}$ est appelé **vecteur directeur** de d.
- L'ensemble de tous les points $M(x\,;y)$ du plan qui appartiennent à la droite d est caractérisé par l'**équation vectorielle paramétrique de la droite** suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{v} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}}$$

Que l'on utilisera aussi sous forme d'un **système d'équations paramétriques** :

$$\boxed{\begin{cases} x = a_1 + k \cdot v_1 \\ y = a_2 + k \cdot v_2 \end{cases} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}}$$

Remarque: Si la droite est donnée par deux points A et B, on prend le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur.

Exemple 1: Donner <u>une</u> **équation vectorielle paramétrique** de la droite passant par $A(2\,;-5)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exemple 2: Donner <u>un</u> **système d'équations paramétriques** de la droite passant par $A(2\,;-5)$ et $B(-3\,;2)$.

Exercice 1.1:

a) Que peut-on affirmer au sujet des vecteurs directeurs de deux droites parallèles ?

b) On considère la droite d d'équation : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$.
Déterminer l'équation paramétrique de la droite parallèle à d et passant par $P(8\,;-9)$.

c) Déterminer l'équation paramétrique de la droite perpendiculaire à d et passant par $P(8\,;-9)$.

1.3 Équations cartésiennes de la droite

Rappels: Vous avez étudié dans un cours d'algèbre de base qu'une droite représentée dans un système d'axes peut être interprétée comme la représentation graphique d'une fonction affine :

$$x \mapsto mx + h$$

- m s'appelle **la pente** et correspond au calcul :

$$m = \frac{\text{variation verticale}}{\text{variation horizontale}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- h s'appelle **l'ordonnée à l'origine** et donne la hauteur à laquelle la droite coupe l'axe Oy. Ce point d'intersection admet donc les coordonnées $H(0\,;h)$.

Une telle droite peut également s'écrire sous la forme d'une équation appelée **équation réduite** :

$$y = mx + h \qquad (1)$$

ou encore **équation cartésienne** en "amenant" tous les termes du même "côté du =" :

$$ax + by + c = 0 \qquad (2)$$

où a, b et c sont si possible des entiers.

Exemple 3:

- Écrire l'équation $y = -\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}$ sous sa forme **d'équation cartésienne**.

- Écrire l'équation $5x + 2y - 8 = 0$ sous sa forme **d'équation réduite**.

- Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite d'équation : $3x - 2y + 7 = 0$.

- Donner une équation cartésienne et l'équation réduite de la droite d passant par le point $H(0\,;8)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.2: Déterminer une équation cartésienne et l'équation réduite de la droite :

a) de pente $m = -1/7$ et d'ordonnée à l'origine $h = -2$.

b) de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ passant par $H(0\,;1/2)$.

Exercice 1.3: Les points suivants $P_1(0\,;1/4)$; $P_2(-2/3\,;0)$; $P_3(5\,;-1)$ appartiennent-ils à la droite d'équation : $3x - 8y + 2 = 0$?

Exercice 1.4: On considère la droite $-3x + 2y - 6 = 0$.

Dans chacun des cas suivant, déterminer les coordonnées d'un point P de cette droite :

a) ayant une abscisse égale à 3 (*rappel : axe des abscisses = axe Ox*) ;

b) ayant une ordonnée égale à -4 (*rappel : axe des ordonnées = axe Oy*) ;

c) ayant ses deux coordonnées égales ;

d) situé sur l'axe des abscisses ;

e) situé sur l'axe des ordonnées ;

f) situé sur la droite $5x - 7y + 4 = 0$.

1.4 Les 4 démarches à connaitre par ♡ :

Type point – pente: Donner une équation cartésienne et l'équation réduite de la droite passant par $A(2\,;3)$ et de pente -2.

Exercice 1.5: Appliquer la même démarche avec $A(-1\,;7)$ et une pente de 3.

Type point – point: Donner une équation cartésienne et l'équation réduite de la droite passant par $A(2\,;3)$ et $B(-3\,;-5)$.

Exercice 1.6: Appliquer la même démarche avec $A(-3\,;4)$ et $B(5\,;7)$.

Type point – vect. dir: Donner une équation cartésienne et l'équation réduite de la droite passant par $A(4\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.7: Appliquer la même démarche avec $A(1\,;-2)$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Type pt – vect. norm: Donner une équation cartésienne et l'équation réduite de la droite passant par $A(4\,;-1)$ et de vecteur normal $\vec{v}_\perp = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.8: Appliquer la même démarche avec $A(1\,;-2)$ et $\vec{v}_\perp = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.9: Déterminer la pente puis une équation cartésienne de la droite donnée par :

a) un point $A(-5\,;4)$ et le vecteur directeur $\vec{v} = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$;

b) un point $A(3\,;-7)$ et la pente $m = -1/5$;

c) un point $A(-1/2\,;3/4)$ et le vecteur directeur $\vec{v} = -\dfrac{2}{3}\vec{e}_1 + \dfrac{1}{3}\vec{e}_2$;

d) les deux points $A(7\,;2)$ et $B(-5\,;8)$;

e) les deux points $A(4/3\,;2/5)$ et $B(3/4\,;-1/3)$;

f) un point $A(-7\,;8)$ et le vecteur directeur $\vec{v} = \vec{e}_1$;

g) un point $A(4\,;5)$ et sachant qu'elle est parallèle à l'axe Oy.

1.5 Représentation d'une droite dans un système d'axes

1re méthode: On calcule les coordonnées de deux points $(x\,;y)$ satisfaisant l'équation de la droite.

2e méthode:

a) On exprime la droite sous la forme $y = mx + h$.

b) On pose le point $H(0\,;h)$ qui correspond à l'ordonnée à l'origine.

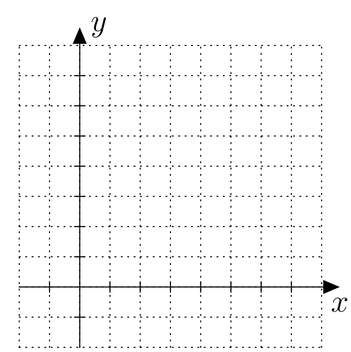
c) On construit depuis H le triangle de la pente m en utilisant que

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

d) On trace la droite reliant H au point ainsi obtenu.

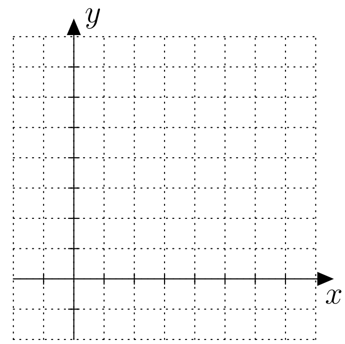
Exemple 4: Utiliser la 1re méthode pour construire la droite :

$$(d) : 2x + 4y - 24 = 0$$

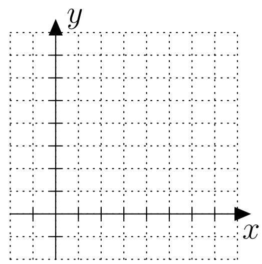


Exemple 5: Utiliser la 2^{e} méthode pour construire la droite :

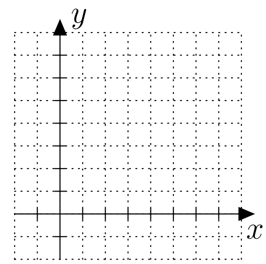
$$(d) : 2x + 4y - 24 = 0$$



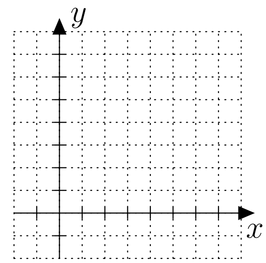
Exercice 1.10: Représenter les 3 droites sur les systèmes d'axes ci-dessous :



$2x - 3y - 6 = 0$



$5x + 4y - 24 = 0$



$y = 3/4x$

1.6 ☞ Cas particuliers des droites parallèles aux axes de coordonnées

Exemple 6: Donner une équation cartésienne de la droite passant par :

$$A(2\,;3) \text{ et } B(4\,;3).$$

Exemple 7: Donner une équation cartésienne de la droite passant par :

$$A(2\,;3) \text{ et } B(2\,;9).$$

Règles:

On considère le nombre réel c

- $x = c$ est une équation réduite d'**une droite verticale**.
- $y = c$ est une équation réduite d'**une droite horizontale**.

Exercice 1.11: En observant uniquement les coordonnées des points A et B, déterminer si la droite AB est horizontale, verticale ou oblique.

a) $A(2\,;-3)$ et $B(5\,;-3)$
b) $A(2\,;-3)$ et $B(3\,;-5)$
c) $A(2\,;-3)$ et $B(2\,;-8)$
d) $A(0\,;0)$ et $B(0\,;1)$
e) $A(-5\,;-3)$ et $B(-5\,;-3)$
f) $A(1\,;2)$ et $B(3\,;4)$

Exercice 1.12: Exprimer dans chacun des cas suivants (si cela est possible) la pente et l'ordonnée à l'origine des droites puis les représenter dans un système d'axes orthonormé Oxy :

a) $2x - 3y + 6 = 0$
b) $5x + 3y - 15 = 0$
c) $2{,}1x + 4{,}7y - 13{,}8 = 0$
d) $-5y = 0$
e) $2x + 5 = 0$
f) $-3x + 9 = 0$
g) $2x = 0$

Exercice 1.13: Déterminer une équation cartésienne de la droite parallèle à la droite $4x - 3y + 7 = 0$ et qui passe par le point $P(-7\,;8)$.

Même question avec $P(-2\,;3)$ et $-3x + 5y + 15 = 0$.

1.7 Équation paramétrique $\rightleftarrows$ Équation cartésienne

Exemple 8:

- Donner une équation cartésienne de : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Donner une équation paramétrique de $6x + 3y - 9 = 0$.

Exercice 1.14: Déterminer une équation cartésienne de la droite donnée par le système d'équations paramétriques suivant : $\begin{cases} x = 7 - 4k \\ y = 3 + 5k \end{cases}$.

Exercice 1.15: Montrer que les équations suivantes représentent toutes la même droite.

a) $3x + 2y - 11 = 0$

b) $\begin{cases} x = 5 - 2k \\ y = -2 + 3k \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 1 - 3k \end{cases}$

d) $y = -3/2x + 11/2$

e) $6x + 4y - 22 = 0$

f) $\dfrac{9 - x}{2} = \dfrac{y + 8}{3}$

Exercice 1.16: On donne deux points $A(7\,;2)$ et $B(-5\,;8)$.
Soit $P(x\,;y)$ un troisième point aligné avec A et B.

a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

b) Justifier pourquoi $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$

c) En déduire une équation cartésienne de la droite AB.

Remarque: L'exercice précédent nous fournit une nouvelle démarche pour déterminer l'équation d'une droite passant par deux points (du **type point − point**)

Exercice 1.17: En utilisant la même méthode qu'à l'exercice précédent, déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points $A(2\,;3)$ et $B(5\,;-6)$.

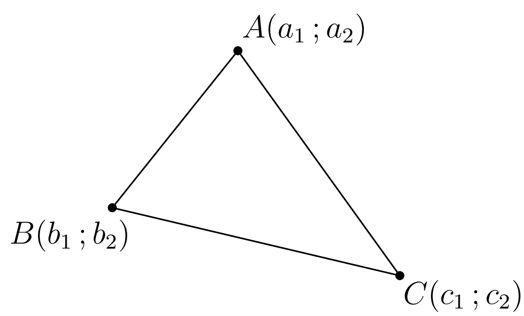
Exercice 1.18: Passer en couleurs sur la figure ci-dessous l'ensemble de tous les points $P(x\,;y)$ possibles tels que :

a) $\overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{BA} = 0$

b) $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$

c) $\overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$

d) $\det\begin{pmatrix} c_1 - b_1 & x - a_1 \\ c_2 - b_2 & y - a_2 \end{pmatrix} = 0$



Exercice 1.19: On considère le triangle ABC défini par :

$$A(-1\,;2)\ ,\ B(3\,;-2)\ \text{et}\ C(1\,;3).$$

À l'aide de l'exercice qui précède, déterminer une équation de :

a) la médiatrice de AB.

b) la hauteur h_B issue de B.

c) la parallèle au côté BC passant par A.

Exercice 1.20: Soit les points $A(8\,;-3)$ et $B(5\,;4)$.
Soit l'ensemble $E = \left\{P(x\,;y) \text{ tels que } \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}\right\}$

a) Cet ensemble E de points correspond à un objet géométrique. Lequel ?

b) Représenter la situation dans un système d'axes Oxy.

1.8 Intersection de deux droites

Exemple 9:

- Déterminer les coordonnées du point d'intersection des 2 droites d et g d'équations :

$$y = \frac{-2}{3}x + 3 \quad \text{et} \quad 7x - 12y - 9 = 0$$

- Qu'en est-il si $(d) : 3x + 2y - 1 = 0 \quad$ et $\quad (g) : \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \end{cases}$

Exercice 1.21: Trouver le point d'intersection I des paires de droites suivantes :

a) $4x - 3y - 6 = 0$ et $6x + y - 20 = 0$

b) $4(x + 3) = 3(6 - y)$ et $3x + 2y - 4 = 0$

c) $5x + 4y - 7 = 0$ et $\begin{cases} x = 7 - 4k \\ y = 1 + k \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = -2 + k \\ y = -5 + 2k \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$

Exercice 1.22: Déterminer les éventuels points d'intersection I des 2 droites :

a) $4x - 6y - 3 = 0$ et $-2x + 3y - 5 = 0$

b) $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 - k \end{cases}$ et $x + y = 3$

Exercice 1.23: On considère les points $A(-2\,;-1)$, $B(4\,;3)$, $C(1\,;3)$, $D(5\,;0)$.
Calculer les coordonnées de l'intersection des droites AB et CD.

Exercice 1.24: Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites AB et CD

a) $A(0\,;2)$ $B(2\,;3)$ $C(3\,;5/2)$ $D(-2\,;5/2)$

b) $A(0\,;2)$ $B(2\,;3)$ $C(1\,;0)$ $D(3\,;1)$

c) $A(1\,;3)$ $B(3\,;4)$ $C(5\,;5)$ $D(-1\,;2)$

Exercice 1.25: On considère les points :

$$A(0\,;1)\,;\ B(0\,;6)\,;\ C(0\,;5)\,;\ D(13/2\,;-1)\,;\ E(7\,;-4) \text{ et } F(-3\,;13).$$

Déterminer les coordonnées des sommets du triangle défini par les droites AB, CD et EF.

Exercice 1.26: On considère les points $A(3\,;-2)$, $B(-3\,;2)$ et $C(0\,;-1)$.

a) Déterminer les équations cartésiennes des côtés du ΔABC.

b) Déterminer les équations cartésiennes des médianes du ΔABC.

Exercice 1.27: Déterminer les coordonnées des sommets du triangle ABC dont les côtés sont situés sur les droites d'équations :

$$4x + 3y - 5 = 0 \quad ; \quad -x + 3y - 10 = 0 \quad ; \quad x = 2$$

Exercice 1.28: On donne trois sommets $A(1\,;2)$, $B(6\,;0)$ et $C(9\,;2)$ d'un parallélogramme $ABCD$.
Déterminer les équations des côtés et des diagonales du parallélogramme ainsi que les coordonnées du sommet D.

Exercice 1.29: On donne les équations de deux côtés d'un parallélogramme :

$$x - 2y - 4 = 0 \quad \text{et} \quad x + 5y + 24 = 0$$

et l'équation de l'une de ses diagonales : $2x + 3y + 13 = 0$.
Trouver l'équation de la seconde diagonale et les coordonnées des sommets.

Exercice 1.30: Déterminer les équations des médianes du triangle de côtés :

$$2x - 3y + 5 = 0 \quad ; \quad 5x - 2y - 26 = 0 \quad ; \quad 3x + y - 9 = 0.$$

Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de ces médianes ?

1.9 La position relative de 2 droites

Exemple 10: Donner deux vecteurs perpendiculaires à la droite :

$$(d) : 5x + 2y - 7 = 0$$

puis une équation de la droite perpendiculaire à d passant par $P(2\,;-3)$.

Exercice 1.31: Déterminer une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à la droite $4x - 3y + 7 = 0$ et qui passe par le point $P(-7\,;8)$.
Même question avec $P(-2\,;3)$ et $-3x + 5y + 15 = 0$.

Exercice 1.32: On donne les points $A(2\,;1)$, $B(4\,;5)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite AB.

b) Déterminer une équation cartésienne de la perpendiculaire à AB passant par A.

c) Déterminer une équation cartésienne de la perpendiculaire à AB passant par B.

Exercice 1.33:

a) On donne les points $A(2\,;1)$, $B(4\,;5)$. Considérons encore le point $P(x\,;y)$ situé sur une perpendiculaire à AB passant par A.
En utilisant le produit scalaire, démontrer que x et y doivent vérifier la relation $x + 2y - 4 = 0$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la perpendiculaire à AB passant par B.

Remarque: L'exercice précédent nous fournit une nouvelle démarche pour déterminer l'équation d'une droite passant par un point et connaissant un vecteur normal (du **type point – vect. norm**)

Exercice 1.34: Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de BC où $B(13\,;4)$ et $C(11\,;10)$.

Théorème: On considère deux droites d et g dont les pentes valent m_d et m_g

d et g sont **parallèles** ou **confondues** $\iff$ $m_d = m_g$
d et g sont **perpendiculaires** $\iff$ $m_d \cdot m_g = -1$

Preuve :

Exercice 1.35: Pour quelle(s) valeur(s) de t, les droites

$$(d) : y = (t-2)x + 3 \qquad \text{et} \qquad (g) : 3x - ty = 0$$

sont-elles :

a) parallèles ?

b) perpendiculaires ?

Théorème: Si d est une droite de pente m et α désigne l'angle d'inclinaison (orienté) entre l'axe Ox et d alors :

$$m = \tan(\alpha)$$

Preuve :

Exemple 11: Déterminer l'angle aigu d'inclinaison entre l'axe Ox et la droite d'équation : $2x + 3y - 5 = 0$.

Exercice 1.36: On donne les droite $(d) : y = 5x + 1$ et $(g) : y = -4x + 3$.

Calculer les angles α et β d'inclinaison aigu (orienté) :

a) entre l'axe Ox et d **b)** entre l'axe Ox et g

En déduire les angles aigus γ et δ entre les droites :

c) d et g **d)** d et l'axe Oy

Théorème: On considère deux droites d et g dont les vecteurs directeurs sont respectivement $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

L'angle α entre les deux droites sera donné par :

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|}\right)$$

Exercice 1.37: Donner dans chaque cas un vecteur directeur de chacune des droites, puis calculer l'angle aigu α formé par ces droites :

a) $3x - 5y + 4 = 0$ et $x + y - 2 = 0$

b) $y = -x + 5$ et $y = -2x + 1$

1.10 Un petit mélange de tout ce que vous devez savoir ! ! !

Exercice 1.38: Du triangle ABC, on connaît les équations de 2 côtés :

$$(AC) : -3x - y + 13 = 0 \qquad \text{et} \qquad (BC) : x - 2y - 2 = 0.$$

De plus $(m) : 4x - y = 1$ est une équation de la médiane issue de A.

Calculer une équation de la droite AB.

Exercice 1.39: Calculer les sommets d'un parallélogramme dont on donne le sommet $A(10\,;1)$, les équations de 2 côtés :

$$x - 2y + 5 = 0 \qquad \text{et} \qquad -x + 2y + 8 = 0,$$

ainsi que l'équation d'une diagonale : $6x - 25y = -43$.

Exercice 1.40: Représenter dans un système d'axes Oxy les droites :

$$(d) : 4x + y - 3 = 0 \qquad \text{et} \qquad (g) : y = 1/2x + 2.$$

Déterminer :

a) l'angle α entre l'axe Ox et d **b)** l'angle β entre l'axe Ox et g

c) l'angle γ entre d et g.

Exercice 1.41: On donne $A(-4\,;-1)$, $B(-3\,;2)$, $C(1\,;4)$.
Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un trapèze isocèle de base AD.

Exercice 1.42: Déterminer l'orthocentre (intersection des hauteurs) du triangle $A(2\,;1)$, $B(-1\,;-1)$ et $C(3\,;2)$.

Exercice 1.43: Prouver que les pieds des perpendiculaires, issues de $P(9\,;5)$, aux côtés du triangle $A(8\,;8)$ $B(0\,;8)$ $C(4\,;0)$ sont alignés.

Exercice 1.44: Calculer les sommets d'un rectangle dont on donne 2 côtés :

$$x = 2y \qquad ; \qquad 2y - x - 15 = 0$$

et une diagonale $7x + y - 15 = 0$.

Exercice 1.45: Un rayon lumineux parcourt la droite $(d) : x - 2y + 5 = 0$, et il se réfléchit sur la droite $(e) : 3x - 2y + 7 = 0$.
Quelle est l'équation du rayon réfléchi ?

Exercice 1.46: Calculer les coordonnées du sommet C du triangle ABC si :

- $5x - 3y + 2 = 0$ est une équation de AB,
- $4x - 3y + 1 = 0$ est une équation de la hauteur issue de A et
- $7x + 2y - 22 = 0$ est celle de la hauteur issue de B.

Exercice 1.47: Déterminer les équations des côtés du triangle ABC connaissant $C(4\,;-1)$, ainsi que les équations de la hauteur h et de la médiane m issue d'un même sommet :

$$(h) : 2x - 3y + 12 = 0 \qquad \text{et} \qquad (m) : 2x + 3y = 0$$

Exercice 1.48: Déterminer les sommets A et C du triangle ABC dont on donne $B(2\,;-7)$, ainsi que les équations de la hauteur h issue de C et de la médiane m issue de A :

$$(h) : 3x + y + 11 = 0 \qquad \text{et} \qquad (m) : x + 2y + 7 = 0.$$

Indication : pour déterminer C on posera $C(\alpha\,;\beta)$ et on exprimera que $C \in h$ et que le milieu M de $[BC]$ est sur m.

Exercice 1.49: L'aire du triangle ABC vaut $3/2$. Deux de ses sommets sont $A(2\,;-3)$ et $B(3\,;-2)$, le centre de gravité du triangle se trouve sur la droite d d'équation $(d) : y = 3x - 8$.

Calculer les coordonnées de C.

Exercice 1.50: D'un triangle ABC, on sait que $A(7\,;-5)$, $B(2\,;3)$, son centre de gravité est situé sur la droite d d'équation :

$$(d) : x - 3y - 3 = 0.$$

Déterminer les coordonnées du troisième sommet C, si l'on sait encore que sa première coordonnée est le double de sa deuxième.

2

Distance point-droite et bissectrices

2.1 L'équation normale d'une droite

Introduction: *L'équation normale d'une droite nous permettra de calculer la distance d'un point à une droite ainsi que d'établir les équations cartésiennes des bissectrices d'une paire de droites données.*

Définition: L'**équation normale** d'une droite d'équation cartésienne

$$ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont si possible des entiers.

est définie par :

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

Exemple 1: Soit $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$ l'équation cartésienne réduite d'une droite.
L'équation normale de cette droite est :

Exercice 2.1: Déterminer l'équation normale des droites suivantes :

a) $3x + 4y - 4 = 0$ **b)** $y = 2{,}4x - 0{,}4$

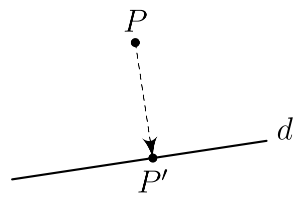
c) $15x + 8y - 7 = 0$ **d)** $y = \dfrac{4}{3}x - 5$

e) $y - 4 = 0$ **f)** $x = 5$

g) $y = x$ **h)** $6x - 8y - 29 = 0$

2.2 Proj. orthogonale et distance d'un point à une droite

Définition: Soit d une droite et P un point hors de d.
On appelle **projection orthogonale de $\boldsymbol{P}$ sur $\boldsymbol{d}$** le point P' de d tel que :



$$PP' \perp d$$

Exercice 2.2:

a) Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du point $P(-2\,;6)$ sur la droite AB avec $A(0\,;-3)$ et $B(5\,;0)$.

b) Calculer les coordonnées du symétrique du point $P(12\,;1)$ relativement à la droite $3x+2y-12=0$.

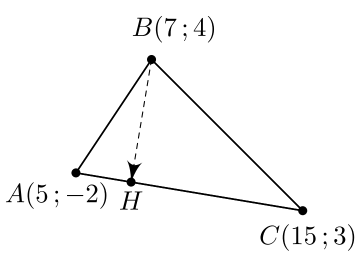
Exercice 2.3: On considère le triangle ABC donné par ses sommets :

$$A(2\,;-3), B(3\,;2) \text{ et } C(-2\,;5)$$

a) Déterminer la mesure de la hauteur issue de A.

b) En déduire l'aire du triangle ABC.

Exercice 2.4: Soit le triangle ABC, on considère le point H projection orthogonale de B sur AC.



a) En déduire les coordonnées de H.

b) Déterminer $\|\overrightarrow{BH}\|$

c) En déduire la distance entre le point B et la droite AC.

Définition: La distance du point P à la droite d est notée $\delta(P\,;d)$. Elle est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{PP'}$, où P' est la projection de P sur d.

Théorème: La distance du point $P(x_P\,;y_P)$ à la droite (d) : $ax+by+c=0$ est donnée par la formule suivante :

$$\delta(P\,;d) = \frac{|\,ax_P+by_P+c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Preuve : L'utilisation et la mémorisation de cette formule sont prioritaires par rapport à une preuve. Ainsi nous acceptons cette formule sans preuve.

Exemple 2:

- Calculer $\delta(P\,;d)$ où $(d) : 3x - 4y = 6$ et $P(1\,;-2)$.

Cette nouvelle méthode remplacera avantageusement :

a) exprimer la pente de d puis la pente d'une droite $\perp$ à d ;

b) déterminer l'équation de la droite $g \perp$ à d et passant par P ;

c) déterminer le point $P' = d \cap g$;

d) calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{PP'}$.

- Soit encore la droite $(h) : x + y - 1 = 0$, trouver les points de h qui sont situés à une distance égale à 3 de d.

Exercice 2.5: Reprendre l'**exercice 2.3** en utilisant la formule $\delta(A\,;d)$ où d est l'équation de BC.

Exercice 2.6: Calculer la distance du point A à la droite d :

a) $A(2\,;-1)\,;\quad (d) : 4x + 3y + 10 = 0$

b) $A(0\,;-3)\,;\quad (d) : y = \frac{5}{12}x - \frac{23}{12}$

c) $A(-2\,;3)\,;\quad (d) : y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

d) $A(1\,;-2)\,;\quad (d) : x = 2y + 5$

Exercice 2.7: Calculer l'aire d'un carré dont l'un des sommets est $A(2\,;-5)$ et dont l'un des côtés a pour support la droite $(d) : x - 2y - 7 = 0$.

Exercice 2.8: Calculer l'aire d'un rectangle connaissant le sommet $A(-2\,;1)$ ainsi que les équations de deux côtés non parallèles : $3x - 2y - 5 = 0$ et $4x + ay + 14 = 0$.

Exercice 2.9: Calculer la distance qui sépare les droites d'équation $4x-3y-8 = 0$ et $8x = 6y$, après avoir vérifié leur parallélisme. Déterminer l'équation de la droite g située à équidistance de ces 2 droites.

Exercice 2.10: Déterminer les équations des droites situées à distance 1 de la droite $4x - 3y - 8 = 0$.

Exercice 2.11: On donne 3 droites par leur équation :

$$(d) : x + y - 1 = 0 \qquad (g) : 3x + 4y = 0 \qquad (h) : x + 5 = 0$$

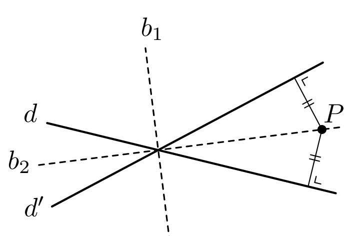
Calculer $P \in d$ tel que $\delta(P\,;g) = 2 \cdot \delta(P\,;h)$.

2.3 Bissectrices de deux droites

Rem. préliminaire: Un point P se trouve sur l'une des bissectrices des droites d et d'

$$\Updownarrow$$

$$\delta(P\,;d) = \delta(P\,;d').$$



On peut facilement prouver que les deux bissectrices sont perpendiculaires.

Théorème: Soit d et d' deux droites sécantes :

$$(d) : ax + by + c = 0 \quad , \quad (d') : a'x + b'y + c' = 0.$$

Les équations des deux bissectrices de d et d' sont données par :

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

Preuve :

Exemple 3: Déterminer les équations des bissectrices des droites :

$$(d) : 3x + 4y + 2 = 0 \qquad \text{et} \qquad (g) : y = \frac{-5}{12}x + \frac{1}{12}.$$

Exercice 2.12: **a)** Calculer les équations des bissectrices des droites d'équation :

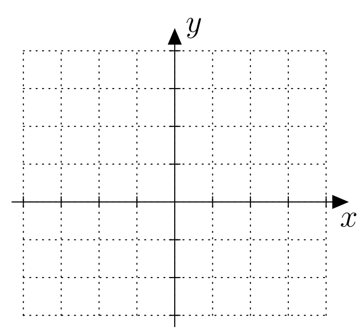
$$2x + 3y + 6 = 0 \quad \text{et} \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

b) Idem pour $x + 2y - 7 = 0$ et $4x - 2y - 9 = 0$.

Exemple 4:

- Déterminer les équations des bissectrices de l'axe Ox et de la droite d'équation $(d) : y = \dfrac{4}{3}x$.

- Quelle est, parmi les 2 solutions, la bissectrice passant dans le 1^er^ quadrant ?



Exercice 2.13: Déterminer l'équation de la bissectrice de l'angle obtus déterminé par les droites d'équation :

$$y = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{5}{3} \quad \text{et} \quad y = 3x + 15.$$

Exercice 2.14: On donne les droites $(d) : y = x$ et $(g) : 3x+4y-12 = 0$. Déterminer un point de d situé à la même distance de g et de l'axe Ox.

Exercice 2.15: Déterminer l'équation de la bissectrice de l'angle déterminé par les droites d'équation $2x - 3y - 5 = 0$ et $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$ qui coupe l'axe Ox dans sa partie négative.

Exercice 2.16: Déterminer les équations des bissectrices intérieures du triangle formé par les points $A(-5\,;-5)$, $B(-5\,;10)$ et $C(15\,;-5)$.

Exercice 2.17: Calculer les coordonnées du centre et le rayon du cercle inscrit dans le triangle, dont les côtés ont pour équation :

$(a) : y = \frac{4}{3}x + 8$, $(b) : 12x + 5y - 33 = 0$, $(c) : 3x + 4y + 11 = 0$.

Exercice 2.18: On donne :

- le point $P(2\,;-1)$;
- les droites d et g d'équation respective :

$$y = 2x + 5 \quad \text{et} \quad 3x + 6y - 1 = 0\,;$$

- le point A, situé à l'intersection des droites d et g.

Déterminer les équations des droites passant par P et qui forment avec les droites d et g des triangles isocèles en A.

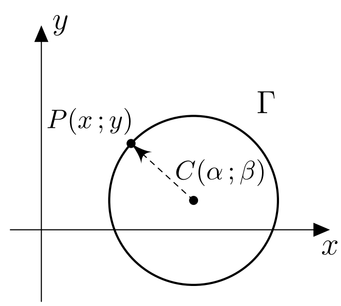
Exercice 2.19: On donne deux droites $(d) : x + 7y - 23 = 0$ et $(g) : x - y + 9 = 0$, ainsi que les points $P(3\,;0)$ et $Q(-9\,;6)$.

Calculer les points qui sont à la fois équidistants de d et de g et équidistants de P et de Q.

3

Équation du cercle dans le plan

3.1 Les deux formes d'équations de cercle



- **La forme "centre et rayon"**
  Soit Γ un cercle de centre $C(\alpha\,;\beta)$ et de rayon R.

  $$\text{Le point } P(x\,;y) \in \Gamma \iff \|\overrightarrow{CP}\| = R \iff \left\| \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix} \right\| = R$$

  $$\iff (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

Formule: L'**équation cartésienne du cercle** centré en $C(\alpha\,;\beta)$ et de rayon R est donnée par la formule :

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

Exemple 1: $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$ est l'équation d'un cercle centré en $C(4\,;-1)$ et de rayon 3.

- **La forme développée**
  On rencontrera aussi des équations de cercle sous la forme développée : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Forme centre-rayon
$\Downarrow$
Forme développée

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$$

Forme développée
$\Downarrow$
Forme centre-rayon

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$$

Exercice 3.1: Les équations suivantes sont-elles des équations développées de cercle ? Si oui, préciser le centre et le rayon

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$ **b)** $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$ **d)** $x^2 + y^2 + x = 0$

Exercice 3.2: Déterminer l'équation du cercle défini par les conditions suivantes :

a) le centre est $C(2\,;-3)$ et le rayon vaut 7 ;
b) le cercle passe par l'origine et son centre est $C(6\,;-8)$;
c) $[AB]$ est un diamètre du cercle où $A(3\,;2)$ et $B(-1\,;6)$;
d) le centre du cercle est $C(1\,;-1)$ et le cercle est tangent à
$$(d) : 5x - 12y + 9 = 0\,;$$
e) le cercle passe par $A(3\,;1)$ et $B(-1\,;3)$ et est centré sur
$$(d) : 3x - y - 2 = 0\,;$$
f) le cercle est tangent à $(d) : x + y - 4 = 0$ en $T(1\,;3)$ et est centré sur l'axe Ox ;
g) le cercle passe par $A(-1\,;5)$, $B(-2\,;-2)$ et $C(5\,;5)$.

Exercice 3.3: Déterminer les équations des cercles qui ont leur centre sur la droite $4x - 5y - 3 = 0$ et qui sont tangents aux deux droites :
$$2x - 3y - 10 = 0 \quad \text{et} \quad y = \tfrac{3}{2}x + \tfrac{5}{2}.$$

Exercice 3.4: Déterminer les équations des cercles de rayon $\sqrt{5}$ qui sont tangents à la droite $x - 2y - 1 = 0$ au point $T(3\,;?)$.

Exercice 3.5: Déterminer l'équation du cercle qui, ayant son centre sur la droite $2x + y = 0$, est tangent aux droites :
$$y = \tfrac{4}{3}x + \tfrac{10}{3} \quad \text{et} \quad 4x - 3y - 30 = 0.$$

Exercice 3.6: Déterminer les équations des cercles tangents aux droites :
$$y = 7x - 5 \quad \text{et} \quad x + y + 13 = 0,$$
et l'un des points de contact étant $T(1\,;2)$.

Exercice 3.7: Déterminer les équations des cercles tangents aux trois droites :
$$4x - 3y - 10 = 0 \quad ; \quad -3x + 4y + 5 = 0 \quad \text{et} \quad 3x - 4y - 15 = 0.$$

Exercice 3.8: On propose dans cet exercice une autre méthode pour déterminer l'équation d'un cercle passant par trois points

$$A(1\,;1) \qquad B(1\,;-1) \quad \text{et} \quad C(2\,;0).$$

Poser que l'équation du cercle est de la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

et former un système de 3 équations à 3 inconnues.

Exercice 3.9: Soit les points $A(3\,;3)$ et $B(5\,;3)$.

Déterminer l'ensemble E de tous les points $P(x\,;y)$ du plan vérifiant $\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{BP} = 8$.

Représenter la situation sur une figure d'étude.

3.2 Intersections et position relative

Exemple 2:

- Combien y a-t-il de points d'intersection entre Γ et d si :

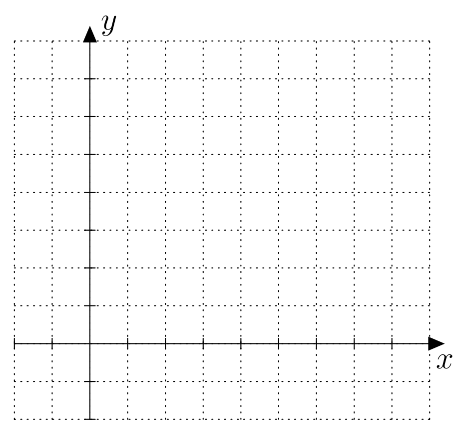
$$(\Gamma) : x^2 + (y+2)^2 = 25 \quad \text{et} \quad (d) : x - 2y + 1 = 0.$$

- Quelles sont les coordonnées de ces points d'intersection ?

Exemple 3: • Calculer les points d'intersection entre les cercles Γ et Γ' si :

$$(\Gamma) : (x-1)^2 + y^2 = 4 \quad \text{et} \quad (\Gamma') : (x-5)^2 + (y-4)^2 = 20$$

Représenter approximativement la situation :



Exercice 3.10: Quelle est la position du point $B(3\,;9)$ par rapport au cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 - 26x + 30y = -313$?

Déterminer la plus courte distance d d'un point de Γ au point B.

Exercice 3.11: Déterminer si la droite et le cercle se coupent, sont tangents ou extérieurs dans les cas suivants :

a) $y = 2x - 3$ $\qquad x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$

b) $x - 2y - 1 = 0$ $\qquad x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$

c) $y = x + 10$ $\qquad x^2 + y^2 = 1$

Exercice 3.12: Calculer le(s) point(s) d'intersection entre le cercle et la droite d'équations :

a) $x^2 + y^2 = 25$ $\qquad 2x - y - 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ $\qquad 3x - 4y - 19 = 0$

Exercice 3.13: Calculer la longueur l de la corde commune aux cercles :

$$(\Gamma_1) : x^2 + y^2 = 10x + 10y \qquad (\Gamma_2) : x^2 + y^2 + 6x + 2y = 40$$

Exercice 3.14: Déterminer l'équation du diamètre du cercle :

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y = 17$$

qui est perpendiculaire à la droite $5x + 2y - 13 = 0$.

Exercice 3.15: Calculer les points d'intersection entre le cercle :

$$x^2 + y^2 + 15x - 12y + 36 = 0$$

et les axes de coordonnées.

Exercice 3.16: Déterminer l'équation d'un cercle tangent à l'axe Ox et passant par les points $A(-2\,;1)$ et $B(5\,;8)$.

Exercice 3.17: Déterminer les équations des cercles tangents à $x + y - 10 = 0$ et passant par $A(7\,;1)$ et $B(-5\,;5)$.

Exercice 3.18: Déterminer les équations des cercles passant par l'origine et qui sont tangents aux droites $x + 2y - 9 = 0$ et $y = 2x + 2$.

Exercice 3.19: Déterminer les équations des cercles passant par $A(-1\,;5)$ et qui sont tangents aux droites :

$$3x + 4y - 35 = 0 \qquad \text{et} \qquad 4x + 3y + 14 = 0.$$

3.3 Tangentes à un cercle

Remarque initiale: On sera souvent confronté au problème suivant :
Mener par un point P une tangente à un cercle Γ.

- Ce problème admet deux solutions si ....
- Ce problème admet une solution si ....
- Aucune solution si ....

Pour savoir dans quel cas on se trouve, on compare le rayon du cercle Γ et la distance entre le point P et le centre du cercle.

Problème 1: Trouver la tangente à un cercle Γ par un point T du cercle.

Résoudre ce problème si $(\Gamma) : (x-1)^2 + (y+3)^2 = 2$ et $T(2\,;-2)$

- 1re démarche (analytique) :

- 2e démarche (vectorielle) :

Exercice 3.20: Après avoir vérifié que le point T est sur le cercle Γ, déterminer les équations des tangentes à Γ au point T dans les cas suivants :

- 1re démarche (analytique) :
  - **a)** $T(-1\,;2)$ $\quad (\Gamma) : x^2 + y^2 = 5$
  - **b)** $T(-5\,;7)$ $\quad (\Gamma) : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$
- 2e démarche (vectorielle) :
  - **c)** $T(0\,;0)$ $\quad (\Gamma) : x^2 + y^2 = 3x - 7y$
  - **d)** $T(-1\,;2)$ $\quad (\Gamma) : x^2 + y^2 - 2x + 6y = 19$
- démarche libre :
  - **e)** $T(2\,;3)$ $\quad (\Gamma) : 2x^2 + 2y^2 = x + 4y + 12$

Problème 2: $\boxed{\text{Trouver les tangentes à un cercle } \Gamma \text{ ayant une direction connue.}}$

Trouver les tangentes à Γ qui sont parallèles à d où :

$$(\Gamma) : (x+1)^2 + y^2 = 4 \quad \text{et} \quad (d) : 3x + 4y - 2 = 0$$

Exercice 3.21:

a) Déterminer les équations des tangentes au cercle

$$x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6,$$

de direction parallèle à la droite $2x + y - 7 = 0$.

b) Déterminer les équations des tangentes au cercle

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0,$$

de direction perpendiculaire à la droite $-x + 2y + 345 = 0$.

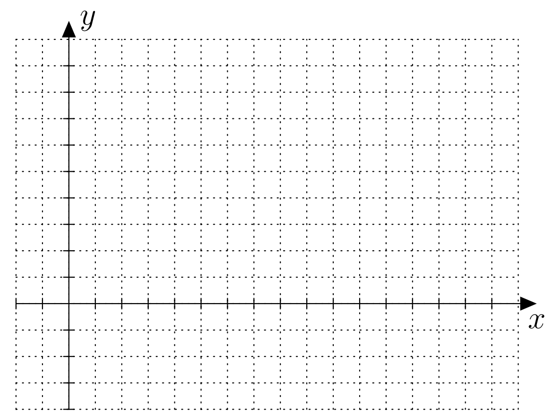
Exercice 3.22: On donne :

- une droite $(g) : 3x + 4y - 34 = 0$;
- et un cercle $(\Gamma) : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

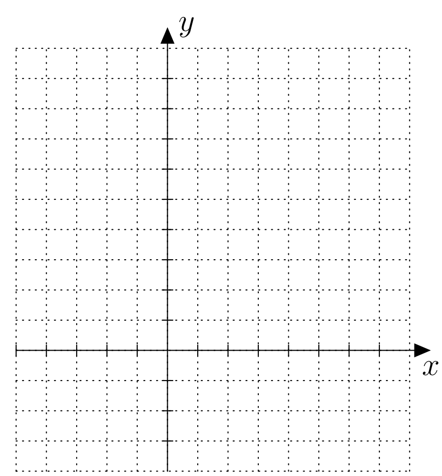
Vérifier que g est tangent à Γ et trouver les équations des 3 droites formant avec g un carré circonscrit à Γ.

Problème 3: Trouver les tangentes à un cercle Γ issues d'un point extérieur P.

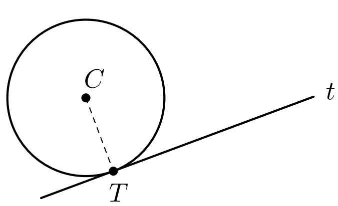
Résoudre ce problème si $(\Gamma) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ et $P(16\,;-3)$



Résoudre ce problème si $(\Gamma) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ et $P(-4\,;9)$



Remarque finale: Si l'on veut calculer les coordonnées des points de tangence connaissant les équations du cercle et des 2 tangentes, la méthode la plus rapide consiste à utiliser la perpendiculaire à la tangente, passant par le centre du cercle.



Exercice 3.23: Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 5$ issues du point $A(5/3\,;-5/3)$.

Exercice 3.24: Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 19 - 2x$ issues du point $A(1\,;6)$.
Calculer les coordonnées des points de tangence.

Exercice 3.25: Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2+y^2-2x+4y = 20$ issues du point $A(6\,;5)$.

Exercice 3.26: Prouver que les cercles d'équation

$$x^2 + y^2 = 49 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$

sont tangents en un point A à déterminer.

Sont-ils tangents intérieurement ou extérieurement ?

Exercice 3.27: Calculer le sommet C du triangle ABC connaissant $A(-15\,;-5)$, $B(1\,;7)$ et sachant que l'origine est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Exercice 3.28: On considère les 2 cercles d'équation :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 81 \qquad \text{et} \qquad (x-16)^2 + (y+3)^2 = 16$$

Déterminer les équations de toutes les tangentes communes aux deux cercles.

A

Bibliographie

Bibliographie

1. CRM, *Géométrie vectorielle et analytique (2016)*, Édition du Tricorne

2. A. Macchi, *Géométrie analytique* (polycopié, Gymnase de Morges)

Site Web

1. Le site compagnon de ce polycopié : `www.javmath.ch`

Avec une version pdf de ce polycopié et quelques exercices supplémentaires ou animations.

2. Le site *Nymphomath* de Didier Müller :

`http://www.nymphomath.ch/MADIMU2/GEOME/GEOME4.PDF`

Support de cours en pdf avec des exercices et leurs solutions

3. Une partie mathématique du site du collège *Sismondi* proposé par Serge Picchione :

`https://www.sismondi.ch/disciplines/mathematiques/espace-perso-profs`
`/serge-picchione/d1_college_geometrie_2e_18_19.pdf`

Support de cours en pdf avec des exercices et leurs solutions

Appendix A — Quelques éléments de solutions

A.1 Équations de la droite dans le plan

Exercice 1.1: **a)** Ils sont colinéaires

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 1.2: **a)** $y = -\dfrac{1}{7}x - 2$ puis $x + 7y + 14 = 0$

b) $y = -3x + \dfrac{1}{2}$ puis $6x + 2y - 1 = 0$

Exercice 1.3: P_1 : oui P_2 : oui P_3 : non

Exercice 1.4: **a)** $P(3\,;15/2)$ **b)** $P(-14/3\,;-4)$ **c)** $P(-6\,;-6)$
d) $P(-2\,;0)$ **e)** $P(0\,;3)$ **f)** $P(-34/11\,;-18/11)$

Exercice 1.5: $y = 3x + 10$ et $3x - y + 10 = 0$

Exercice 1.6: $y = \dfrac{3}{8}x + \dfrac{41}{8}$ et $3x - 8y + 41 = 0$

Exercice 1.7: $y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3}$ et $2x + 3y + 4 = 0$

Exercice 1.8: $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{2}$ et $3x - 2y - 7 = 0$

Exercice 1.9: **a)** $m = -1/3$ $x + 3y - 7 = 0$ **b)** $m = -1/5$ $x + 5y + 32 = 0$
c) $m = -1/2$ $x + 2y - 1 = 0$ **d)** $m = -1/2$ $x + 2y - 11 = 0$
e) $m = 44/35$ $-132x + 105y + 134 = 0$
f) $m = 0$ $y - 8 = 0$
g) $x - 4 = 0$ la pente n'est pas définie

Exercice 1.10: Le corrigé sera vu ensemble

Exercice 1.11: **a)** horizontale **b)** oblique **c)** verticale
d) verticale **e)** il s'agit d'un point ! **f)** oblique

Exercice 1.12: **a)** $m = 2/3$ $h = 2$ **b)** $m = -5/3$ $h = 5$
c) $m \cong -0{,}447$ $h \cong 2{,}936$ **d)** $m = 0$ $h = 0$
e) la pente et l'ordonnée à l'origine ne sont pas définies
f) Idem **g)** Idem

Exercice 1.13: **a)** $4x - 3y + 52 = 0$ **b)** $-3x + 5y - 21 = 0$

Exercice 1.14: $5x + 4y - 47 = 0$

Exercice 1.15: Elles représentent toutes la droite d'équation $3x + 2y - 11 = 0$

Exercice 1.16: **a)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} x-7 \\ y-2 \end{pmatrix}$
b) les deux vecteurs sont colinéaires
c) $x + 2y - 11 = 0$

Exercice 1.17: $3x + y - 9 = 0$
*(Cette méthode utilisant le déterminant n'est-elle pas plus rapide que **point-point** ?)*

Exercice 1.18: Le corrigé sera vu ensemble

Exercice 1.19: **a)** $x - y - 1 = 0$ **b)** $2x + y - 4 = 0$ **c)** $5x + 2y + 1 = 0$

Exercice 1.20: $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} \iff 8x - 3y - 28 = 0$
(équation de la hauteur issue de B du triangle BOA)

Exercice 1.21: **a)** $I(3\,;2)$ **b)** $I(0\,;2)$ **c)** $I(-1\,;3)$ **d)** $I(2\,;3)$

Exercice 1.22: **a)** pas de pt d'intersection **b)** $\{(x\,;y) \mid x + y - 3 = 0\}$

Exercice 1.23: $I(41/17\,;33/17)$

Exercice 1.24: **a)** $(1\,;5/2)$ **b)** les droites sont parallèles **c)** les droites sont confondues

Exercice 1.25: $(0\,;5)$ $(0\,;79/10)$ $(377/101\,;157/101)$

Exercice 1.26: **a)** $(BC) : x + y + 1 = 0$ $(AC) : x + 3y + 3 = 0$ $(AB) : 2x + 3y = 0$
b) $(m_A) : 5x + 9y + 3 = 0$ $(m_B) : 7x + 9y + 3 = 0$ $(m_C) : x = 0$

Exercice 1.27: $A(2\,;4)$ $B(2\,;-1)$ $C(-1\,;3)$

Exercice 1.28: $(AB) : 2x + 5y - 12 = 0$ $(CD) : 2x + 5y - 28 = 0$ $(AC) : y = 2$
$(BD) : 2x + y - 12 = 0$ $(BC) : 2x - 3y - 12 = 0$ $(AD) : 2x - 3y + 4 = 0$

et le quatrième sommet $D(4\,;4)$

Exercice 1.29: Les 4 sommets ont les coordonnées :

$$(-4\,;-4),\ (-2\,;-3),\ (3\,;-4) \text{ et } (1\,;-5).$$

l'équation de la diagonale : $y = -4$

Exercice 1.30: $A(4\,;-3)$ $B(2\,;3)$ $C(8\,;7)$ $G(14/3\,;7/3)$

$(m_{AA'}) : 8x - y - 35 = 0$ $(m_{BB'}) : x + 4y - 14 = 0$
$(m_{CC'}) : 7x - 5y - 21 = 0$

Exercice 1.31: **a)** $3x + 4y - 11 = 0$ **b)** $5x + 3y + 1 = 0$

Exercice 1.32: **a)** $2x - y - 3 = 0$ **b)** $x + 2y - 4 = 0$ **c)** $x + 2y - 14 = 0$

Exercice 1.33: $x + 2y - 14 = 0$

Exercice 1.34: $x - 3y + 9 = 0$

Exercice 1.35: **a)** $t = 3$ ou $t = -1$ **b)** $t = 3/2$

Exercice 1.36: **a)** $\alpha = 78{,}69°$ **b)** $\beta = -75{,}96°$ **c)** $\gamma = 25{,}35°$ **d)** $\delta = 11{,}31°$

Exercice 1.37: **a)** $\alpha = 75{,}96°$ **b)** $\beta = 18{,}43°$

Exercice 1.38: $5x - 3y + 11 = 0$

Exercice 1.39: $B(22\,;7)$ $C(9\,;7)$ $D(-3\,;1)$

Exercice 1.40: $\alpha = (-)75{,}96°$; $\beta = 26{,}57°$; $\gamma = (-)77{,}47°$

Exercice 1.41: $D(4\,;3)$

Exercice 1.42: $H(17\,;-19)$

Exercice 1.43: les 3 points alignés sont $(9\,;8)$, $(3\,;2)$ et $(7\,;6)$

Exercice 1.44: Les 4 sommets du rectangle admettent les coordonnées suivantes :

$$(1\,;8) \qquad (2\,;1) \qquad (-1\,;7) \qquad (4\,;2)$$

Exercice 1.45: $29x - 2y + 33 = 0$

Exercice 1.46: $C(6\,;1)$

Exercice 1.47: $3x + 7y - 5 = 0$ $3x + 2y - 10 = 0$ $9x + 11y + 5 = 0$

Exercice 1.48: $A(5\,;-6)$ $C(-4\,;1)$

Exercice 1.49: $C_1(1\,;-1)$ ou $C_2(-2\,;-10)$

Exercice 1.50: $C(12\,;6)$

A.2 Distance point-droite et bissectrice

Exercice 2.1: **a)** $\dfrac{3x+4y-4}{5}=0$ **b)** $\dfrac{12x-5y-2}{13}=0$ **c)** $\dfrac{15x+8y-7}{17}=0$

d) $\dfrac{4x-3y-15}{5}=0$ **e)** $y-4=0$ **f)** $x-5=0$

g) $\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}=0$ **h)** $\dfrac{6x-8y-29}{10}=0$

Exercice 2.2: **a)** $(5/2\,;-3/2)$ **b)** $(0\,;-7)$

Exercice 2.3: **a)** $\|\overrightarrow{AH}\|=\dfrac{14\sqrt{34}}{17}$ **b)** $Aire=14u^2$

Exercice 2.4: **a)** $H(9\,;0)$ **b)** $\|\overrightarrow{BH}\|=2\sqrt{5}$ **c)** $\delta(B\,;AC)=2\sqrt{5}$

Exercice 2.5: $\delta(A\,;d)=\dfrac{14\sqrt{34}}{17}$

Exercice 2.6: **a)** 3 **b)** 1 **c)** 4 **d)** 0

Exercice 2.7: 5

Exercice 2.8: 6

Exercice 2.9: $8/5$; $4x-3y-4=0$

Exercice 2.10: $4x-3y-13=0$; $4x-3y-3=0$

Exercice 2.11: $(-46/11;57/11)$ ou $(-6\,;7)$

Exercice 2.12: **a)** $5x+5y-1=0$ $x-y-13=0$

b) $2x-6y+5=0$ $6x+2y-23=0$

Exercice 2.13: $x+y+5=0$

Exercice 2.14: $(1\,;1)$ ou $(6\,;6)$

Exercice 2.15: $2x+2y+17=0$

Exercice 2.16: $x-y=0$ $2x+y=0$ $x+3y=0$

Exercice 2.17: Centre$(-11/10;17/10)$; rayon $=29/10$

Exercice 2.18: $x-3y-5=0$; $3x+y-5=0$

Exercice 2.19: $(-2\,;5)$ $(-4\,;1)$

A.3 Équation du cercle dans le plan

Exercice 3.1:
a) $C(1\,;-2)$ $R=5$
b) Ce n'est pas un cercle
c) $C(-2\,;1)$ $R=0 \Longrightarrow$ ce cercle correspond à un point
d) $C(-1/2\,;0)$ $R=1/2$

Exercice 3.2:
a) $(x-2)^2+(y+3)^2=49$ **b)** $(x-6)^2+(y+8)^2=100$
c) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$ **d)** $(x-1)^2+(y+1)^2=4$
e) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$ **f)** $(x+2)^2+y^2=18$
g) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$

Exercice 3.3: $(x-2)^2+(y-1)^2=81/13$ et $(x+8)^2+(y+7)^2=25/13$

Exercice 3.4: $(x-4)^2+(y+1)^2=5$ et $(x-2)^2+(y-3)^2=5$

Exercice 3.5: $(x-1)^2+(y+2)^2=16$

Exercice 3.6: $(x+6)^2+(y-3)^2=50$ et $(x-29)^2+(y+2)^2=800$

Exercice 3.7: $(x+10/7)^2+(y+25/7)^2=1$ et $(x-30/7)^2+(y-5/7)^2=1$

Exercice 3.8: $x^2+y^2-2x=0$

Exercice 3.9: $\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{BP}=8 \iff (x-3)(x-5)+(y-3)^2=8 \iff (x-4)^2+(y-3)^2=9$
E est l'ensemble des points situés sur le cercle centré en $(4\,;3)$ et de rayon 3.

Exercice 3.10: extérieur / $d=17$

Exercice 3.11: **a)** coupe **b)** tangente **c)** extérieure

Exercice 3.12: **a)** $(0\,;-5)$ et $(4\,;3)$ **b)** $(5\,;-1)$

Exercice 3.13: $l=10$

Exercice 3.14: $2x-5y=-19$

Exercice 3.15: $(-12\,;0)$ $(-3\,;0)$ $(0\,;6)$

Exercice 3.16: $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ ou $(x+7)^2+(y-13)^2=169$

Exercice 3.17: $x^2+y^2=50$ ou $(x+10)^2+(y+30)^2=1250$

Exercice 3.18: $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ ou $(x-22/5)^2+(y+31/5)^2=289/5$

Exercice 3.19: $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ ou $(x+202/49)^2+(y-349/49)^2=(185/49)^2$

Exercice 3.20:
a) $x-2y+5=0$ **b)** $3x-4y+43=0$ **c)** $3x-7y=0$
d) $2x-5y+12=0$ **e)** $7x+8y-38=0$

Exercice 3.21: **a)** $2x + y - 1 = 0$ et $2x + y + 19 = 0$
b) $2x + y - 5 = 0$ et $2x + y + 5 = 0$

Exercice 3.22: $3x + 4y + 16 = 0$ $4x - 3y + 38 = 0$ $4x - 3y - 12 = 0$

Exercice 3.23: $x - 2y - 5 = 0$ $2x - y - 5 = 0$

Exercice 3.24: $2x + y - 8 = 0$ $x - 2y + 11 = 0$ $T_1(3\,;2)$ et $T_2(-3\,;4)$

Exercice 3.25: $x = 6$ et $12x - 35y + 103 = 0$

Exercice 3.26: $A(21/5\,;28/5)$

Exercice 3.27: $C(10\,;-5)$

Exercice 3.28: La résolution de cet exercice mérite bien… un petit *Bonus*…

Si vous souhaitez commander ou utiliser ce polycopié dans vos classes, merci de prendre contact avec son auteur en passant par son site web :

`www.javmath.ch`