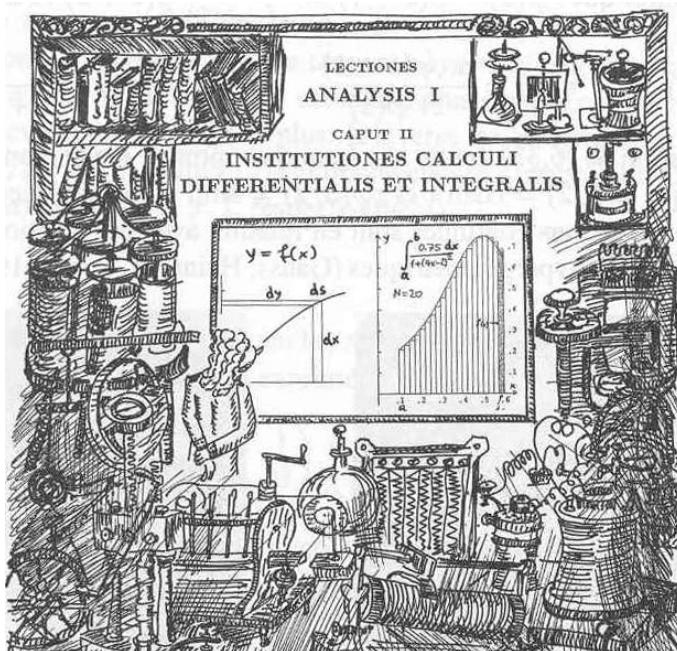


Analyse II

3M_{Stand}

Jean-Philippe Javet



Chapitre 7 :	Optimisation	1
Chapitre 8 :	Les fonctions e^x et $\ln(x)$	11
Chapitre 9 :	Primitives et intégrales	27
Chapitre 10 :	Applications des intégrales	47
Quelques éléments de solutions	55

Table des matières

7 Optimisation	1
7.1 Optimisation	1
7.2 Optimisation avec des fonctions trigonométriques	7
8 Les fonctions exponentielles et logarithmiques	11
8.1 Quelques rappels	11
8.2 Calculs de la dérivée de $f(x) = e^x$ et $f(x) = \ln(x)$	14
8.3 Calculs de limites (utiles pour les études fonctions)	19
8.4 Études de fonctions exponentielles	24
9 Primitives et intégrales	27
9.1 «À quoi ça sert ?»	27
9.2 3 exemples pour débuter	27
9.3 Les primitives	29
9.4 L'intégrale définie	35
9.5 Le calcul de l'aire géométrique “sous une courbe”	39
9.6 Le calcul de l'aire géométrique entre deux courbes	42
9.7 Calcul d'intégrales avec un paramètre	45
10 Application des intégrales	47
10.1 Les intégrales pour calculer des volumes de révolution	47
10.2 Calcul du volume d'un solide de révolution « creux »	50
A Bibliographie	53
A Quelques éléments de solutions	I

Malgré le soin apporté lors de sa conception, le polycopié que vous avez entre les mains contient certainement quelques erreurs et coquilles. Merci de participer à son amélioration en m'envoyant un mail :

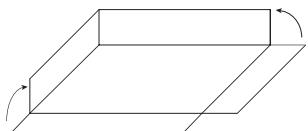
javmath.ch@gmail.com

Merci ;-)

Optimisation

7.1 Optimisation

Introduction:



Dans beaucoup d'applications, les grandeurs physiques ou géométriques sont exprimées à l'aide d'une formule contenant une fonction. Il peut s'agir de la température d'un corps au moment x , du volume d'un gaz dans un ballon sphérique de rayon r , de la vitesse d'un corps au temps t , ...

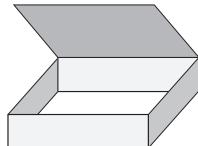
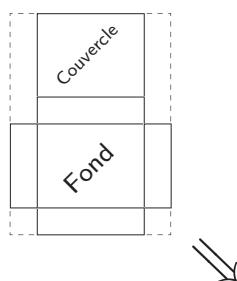
Disposant de cette fonction, sa dérivée pourra nous être utile pour déterminer ses valeurs extrêmes. Celles-ci sont parfois appelées **valeurs optimales** parce que, vu leur signification, elles constituent les valeurs les plus favorables. Déterminer ces valeurs constitue ce que l'on appelle un **problème d'optimisation**.

Plan de résolution:

Voici la marche à suivre pour résoudre un problème d'optimisation :

- ① Lisez le problème attentivement (plusieurs fois) en réalisant et en complétant parallèlement une figure d'étude pour y indiquer toutes les informations.
- ② Exprimez la quantité Q à optimiser (une aire, un volume, des coûts, ...) comme fonction d'une ou de plusieurs variables.
- ③ Si Q dépend de plus d'une variable, disons n variables, trouvez au moins $(n - 1)$ équations liant ces variables.
- ④ Utilisez ces équations pour exprimer Q comme fonction d'une seule variable (par substitutions).
- ⑤ Déterminez l'ensemble de définition E_D des valeurs admissibles de cette variable.
- ⑥ Calcul de la dérivée de Q , fonction à optimiser.
- ⑦ À l'aide d'un tableau de signes de la dérivée de Q , étudiez la croissance de cette fonction.
- ⑧ Calculez les extremums de Q sans oublier de contrôler ce qui se passe au bord de E_D .
- ⑨ Répondez finalement à la question posée à l'aide d'une phrase.

Exemple 1: On dispose d'une feuille de carton rectangulaire dont les dimensions sont 48×35 cm. On y découpe le patron représenté ci-contre que l'on referme selon les plis pour créer une boîte avec son couvercle. Quel sera le volume maximal de la boîte que l'on pourra ainsi construire ?



- ① Lisez le problème attentivement (plusieurs fois) en y indiquant sur la figure toutes les informations.
- ② Exprimez la quantité V à optimiser comme fonction d'une ou de plusieurs variables :

- ③ Comme V dépend de 3 variables, trouvez 2 équations liant ces variables :

- ④ Utilisez ces équations pour exprimer V comme fonction $V(x)$ d'une seule variable (par substitutions) :

- ⑤ Le problème a un sens si x appartient à l'ensemble :

- ⑥ La dérivée de $V(x)$ est :

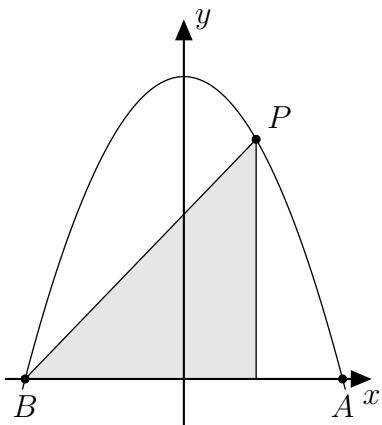
- ⑦ Signe de $V'(x)$ et croissance de $V(x)$:

- ⑧ Au bord du domaine puis ⑨ réponse finale :

Exemple 2: La parabole d'équation $y = -\frac{2}{9}x^2 + 8$ coupe l'axe des abscisses en A et B .

Le point $P(x; y)$ se déplace sur la parabole entre A et B .

Déterminer les coordonnées du point P pour que l'aire du triangle rectangle grisé soit maximum.



① Lisez le problème attentivement (plusieurs fois) en y indiquant sur la figure toutes les informations.

② La quantité à optimiser est Son expression est :

③ Effectuer les calculs nécessaires pour exprimer cette aire :

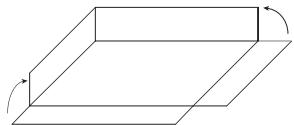
④ La quantité à optimiser en fonction d'une seule inconnue :

⑤ Le problème a un sens si x appartient à l'ensemble :

⑥ La dérivée de $A(x)$ est :

⑦ Signe de $A'(x)$ et croissance de $A(x)$:

⑧ Au bord du domaine puis ⑨ réponse finale :

Exercice 7.1:

On enlève un carré à chaque coin d'une pièce de carton rectangulaire de $22 \text{ cm} \times 18 \text{ cm}$ et on relève ensuite les rectangles latéraux pour former une boîte sans couvercle.

Quelle doit être la dimension des 4 carrés enlevés pour obtenir la boîte de volume maximale ?

Exercice 7.2:

Quelle est la valeur minimale du produit de deux nombres si leur différence est égale à 12 ?

Exercice 7.3:

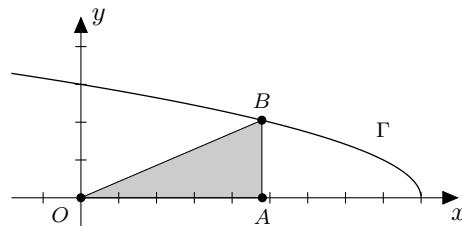
On veut clôturer un pâturage de forme rectangulaire devant avoir une superficie d'un kilomètre carré.

Le pâturage est borné par une route rectiligne sur l'un de ses côtés. Pour clôturer le long de la route, il en coûte 500.- fr. le km, clôturer les autres côtés revient à 300.- fr. le km.

Quelles sont les dimensions du pâturage qui minimisent les coûts ?

Exercice 7.4:

On considère le triangle rectangle OAB situé dans le premier quadrant dont le point B parcourt la courbe Γ d'équation $y = \sqrt{9 - x}$.

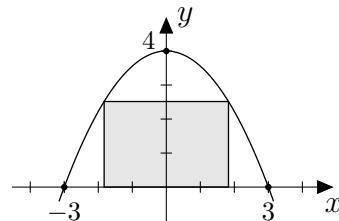


Déterminer les coordonnées du point A pour que l'aire du triangle soit maximale.

Exercice 7.5:

Soit la parabole de sommet $S(0; 4)$. Le rectangle hachuré a une aire maximale.

Quelles sont ses dimensions ?

**Exercice 7.6:**

On considère le triangle ABC défini par :

$$A(3 ; 0), B(-3 ; 0), C(0 ; 6).$$

On inscrit dans ce triangle un rectangle $PQRS$ dont le côté PQ s'appuie sur AB .

Déterminer pour quelle(s) abscisse(s) de P le rectangle ainsi construit a une aire maximale.

Exercice 7.7:

Déterminer les coordonnées des points de la courbe $y = x^2 - 9$ dont la distance à l'origine est minimale.

Exercice 7.8:

Déterminer, pour un volume donné de $V = 1,75 \text{ dm}^3$, les dimensions de la boîte cylindrique qui utilise le minimum de matière première.

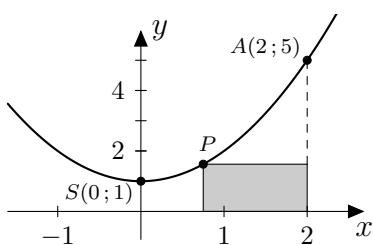
Exercice 7.9:

Soit ABC est un triangle isocèle tel que $AB = AC = 5 \text{ cm}$ et $BC = 6 \text{ cm}$. M est un point de AB . La parallèle à BC passant par M coupe AC en N ; la parallèle à AB passant par N coupe BC en P . On pose $AM = x$.

- Pour quelle valeur de x l'aire du parallélogramme $MNPB$ est-elle maximum ?
- Pour quelle valeur de x le parallélogramme $MNPB$ est-il un losange ?

Exercice 7.10:

- Déterminer l'équation de la parabole représentée ci-contre.



- Pour quel point $P(x; y)$ de la parabole l'aire du rectangle grisé est-elle maximale ?

$$0 \leq x \leq 2$$

- Calculer l'aire maximale du rectangle grisé.

Exercice 7.11:

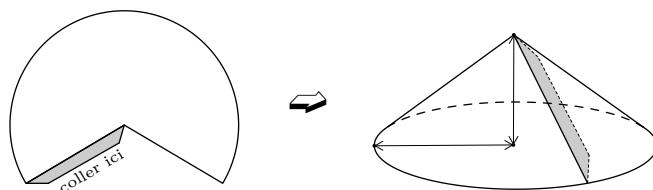
Une feuille de papier doit contenir 600 cm^2 de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent avoir 5 cm chacune, et celles de côté 3 cm chacune. Déterminer les dimensions de la feuille pour lesquelles il faudra un minimum de papier.

Exercice 7.12:

Le propriétaire d'un champ estime que s'il plante 60 poiriers, le rendement moyen sera de 480 poires par arbre et que ce rendement diminuera de 5 poires par arbre pour chaque poirier additionnel planté dans le champ. Combien le propriétaire devrait-il planter de poiriers pour que le rendement du verger soit maximal ?

Exercice 7.13:

On dispose d'un disque en carton flexible de rayon 10 cm , d'une paire de ciseaux et d'un tube de colle. Si l'on découpe un secteur du disque, on peut replier la partie restante et coller ensemble les arêtes découpées. On obtient ainsi un cône de révolution (voir figure). Parmi tous les cônes possibles, fabriqués selon ce procédé, il en est un dont le volume est maximal. Calculer sa hauteur.



Exercice 7.14:

On fait tourner un rectangle de périmètre 60 cm autour de l'un de ses axes de symétrie. Déterminer les dimensions du rectangle pour que le corps de révolution ainsi obtenu ait :

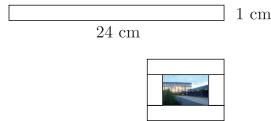
- a) le plus grand volume ;
- b) la plus grande aire latérale ;
- c) la plus grande aire totale.

Exercice 7.15:

Un ébéniste veut fabriquer un tiroir dont la profondeur, de l'avant à l'arrière, est de 40 cm et dont le volume est de 10'000 cm³.

La face avant du tiroir (en chêne) coûte 0,08 fr. par cm² et les autres faces du tiroir (en épicéa) coûtent 0,04 fr. par cm².

Quelles doivent être les dimensions du tiroir pour que le coût de fabrication soit minimal ?

Exercice 7.16:

Un photographe désire fabriquer un cadre pour une photo rectangulaire à partir d'une planche de 24 cm de long et 1 cm de large. Comment devra-t-il couper cette planche pour que l'aire intérieure du cadre soit maximale ?

Exercice 7.17:

Un camion doit effectuer régulièrement un trajet de 1'500 km. Lorsqu'il roule à la vitesse moyenne v , exprimée en km/h, sa consommation $C(v)$, exprimée en litres pour 100 km, est donnée par la relation :

$$C(v) = \frac{600}{v} + \frac{v}{3}.$$

Le salaire horaire du chauffeur est de 26 francs et le litre de gasoil coûte 2 francs.

- a) Montrer que le prix de revient du voyage $P(v)$ peut s'exprimer en francs par :

$$P(v) = \frac{57'000}{v} + 10v.$$

- b) Quelle doit être la vitesse moyenne v pour minimiser le prix de revient du voyage ?

Pause sourire:

Lors d'un grand jeu télévisé, les trois concurrents se trouvent être un ingénieur, un physicien et un mathématicien. Ils ont une épreuve à réaliser. Cette épreuve consiste à construire une clôture tout autour d'un troupeau de moutons en utilisant aussi peu de matériel que possible.

L'ingénieur fait regrouper le troupeau dans un cercle, puis décide de construire une barrière tout autour.

Le physicien construit une clôture d'un diamètre infini et tente de relier les bouts de la clôture entre eux jusqu'au moment où tout le troupeau peut tenir dans le cercle.

Voyant ça, le mathématicien construit une clôture autour de lui-même et se définit comme étant à l'extérieur.

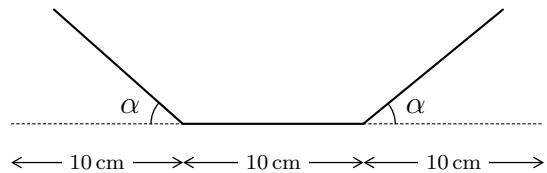
7.2 Optimisation avec des fonctions trigonométriques

Introduction:

L'objectif de ce paragraphe est d'appliquer la même démarche de résolution d'un problème d'optimisation, mais sur une fonction de type trigonométrique.

Exemple 3:

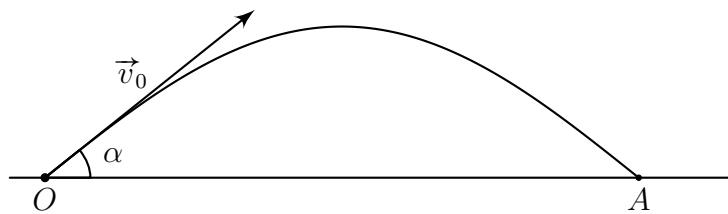
Une gouttière est obtenue en repliant de chaque côté un tiers d'une longue feuille de zinc de 30 cm de large. Comment faut-il choisir α pour que la gouttière puisse retenir la plus grande quantité d'eau possible ?



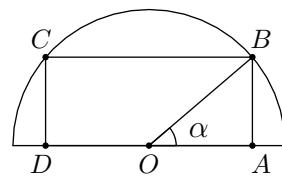
Exercice 7.18: La portée $P = OA$ d'un projectile lancé (dans le vide) avec une vitesse initiale v_0 et un angle d'élévation α est donnée par :

$$P(\alpha) = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g},$$

g étant l'accélération de la pesanteur. Pour une vitesse initiale donnée, déterminer la valeur de l'angle α pour laquelle la portée est maximale.



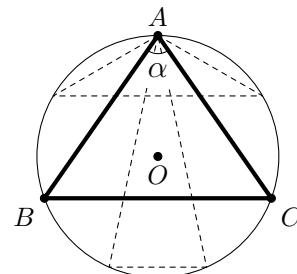
Exercice 7.19: Un rectangle $ABCD$ est inscrit dans un $1/2$ cercle de diamètre égal à 2 cm. Déterminer le rectangle d'aire maximale en prenant l'angle α comme variable.



Exercice 7.20:

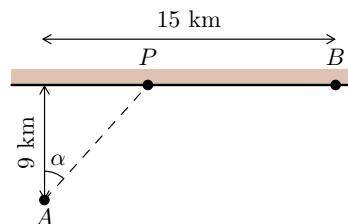
Parmi tous les triangles ABC isocèles de sommet A inscrits dans un cercle de rayon 1, lequel admet une aire maximum ?

Indication : travailler dans le triangle BOC .

**Exercice 7.21:**

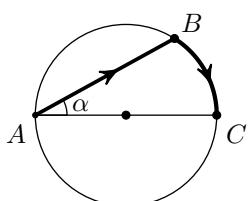
Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h.

La côte étant supposée rectiligne, déterminer l'angle α puis la position du point d'accostage (point P) pour que le temps de parcours soit minimal.

**Exercice 7.22:**

Un promeneur part du point A situé au bord d'un lac circulaire de 2 km de rayon et veut atteindre le point C diamétralement opposé le plus rapidement possible. Il peut aller à pied à la vitesse de 4 km/h ou en barque à la vitesse de 2 km/h.

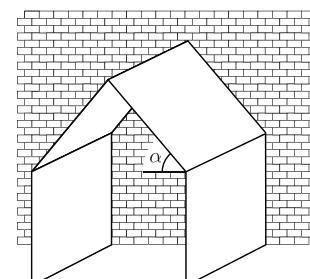
Selon quel angle α par rapport au diamètre doit-il orienter sa barque ?

**Exercice 7.23:**

- a) Avec 4 planches carrées de côté 10 dm, on fabrique une niche à chien contre le mur d'une maison.

Déterminer l'angle α afin que le volume de la niche soit maximal.

- b) Généraliser la démarche pour 4 planches de côté a .



Les fonctions exponentielles et logarithmiques

8.1 Quelques rappels

Les fonctions exponentielle naturelle et logarithme naturel : ce qu'il faut en savoir :			
Fonction exponentielle naturelle	Fonction logarithme naturel		
① Définition :			
$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & \rightarrow & \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$		
Rappel : la base de l'exponentielle est le nombre $e = 2,71828\dots$			
② $E_D =$	<p>La fonction $\ln(x)$ a été définie comme la fonction réciproque de e^x :</p> <table border="1"> <tr> <td> $a \mapsto \rightarrow$ $-1 \mapsto \rightarrow$ $b \mapsto \rightarrow$ $2 \mapsto \rightarrow$ </td><td> $\begin{array}{ccc} & \rightarrow & \\ a & \mapsto & \end{array}$ </td></tr> </table>	$a \mapsto \rightarrow$ $-1 \mapsto \rightarrow$ $b \mapsto \rightarrow$ $2 \mapsto \rightarrow$	$\begin{array}{ccc} & \rightarrow & \\ a & \mapsto & \end{array}$
$a \mapsto \rightarrow$ $-1 \mapsto \rightarrow$ $b \mapsto \rightarrow$ $2 \mapsto \rightarrow$	$\begin{array}{ccc} & \rightarrow & \\ a & \mapsto & \end{array}$		
③ Repr. graphique :			
④ Zéro de la fonction :			
⑤ Tableau de signes :	<table border="1"> <tr> <td>e^x</td> <td></td> </tr> </table>	e^x	
e^x			
⑥ Asymptotes :	<table border="1"> <tr> <td>$\ln(x)$</td> <td></td> </tr> </table>	$\ln(x)$	
$\ln(x)$			

Introduction: La croissance de la population, l'augmentation du capital, l'inflation sont des exemples d'utilisation des fonctions exponentielles.

En 2^e année, nous avons eu l'occasion de travailler avec des formules contenant une expression exponentielle. Dans ce chapitre, nous aborderons cette même notion sous une forme fonctionnelle. Nous terminerons par des études de fonctions exponentielles.

Les règles de calculs de e^x et $\ln(x)$ à connaître

$e^0 = 1$	\leftrightarrow	$\ln(1) = 0$
$e^1 = e$	\leftrightarrow	$\ln(e) = 1$
$e^{\ln(x)} = \ln(e^x) = x$		
si x et $y \in \dots$	\leftrightarrow	si x et $y \in \dots$
$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$	\leftrightarrow	$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$	\leftrightarrow	$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
$(e^x)^y = e^{x \cdot y}$	\leftrightarrow	$\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$

Exemple 1: Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(x - 2) = 4$

b) $e^{x+4} = 5$

Exemple 2: Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(x + 3) = \ln(2x + 7)$

b) $\ln\left(\frac{x + 3}{2 - x}\right) = 0$

Exercice 8.1: Préciser E_D puis résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(x) = 1$

b) $e^{x+3} = 5$

c) $\ln(x - 4) = 4$

d) $e^{2x-1} = -8$

e) $e^{x/10} = 7$

f) $\ln(x) = 0$

g) $\ln(x^2) = 0$

h) $\ln(2x) - \ln(5x - 8) = 0$

i) $\ln\left(\frac{2x}{5x - 8}\right) = 0$

j) $e^{x^2} = 4$

Exemple 3: Déterminer E_D , les zéros et le tableau de signes de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{x}$$

Exercice 8.2: Déterminer l' E_D , les zéros et le signe de f définie par :

a) $f(x) = \ln(2 - 4x)$

b) $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

c) $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{1-x}\right)$

d) $f(x) = \frac{\ln(x)+3}{\ln(x)-2}$

e) $f(x) = \frac{x^2-1}{e^x}$

f) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x}}$

g) $f(x) = (x+3)e^{1/x}$

h) $f(x) = e^{\frac{1}{x+3}}$

8.2 Calculs de la dérivée de $f(x) = e^x$ et $f(x) = \ln(x)$

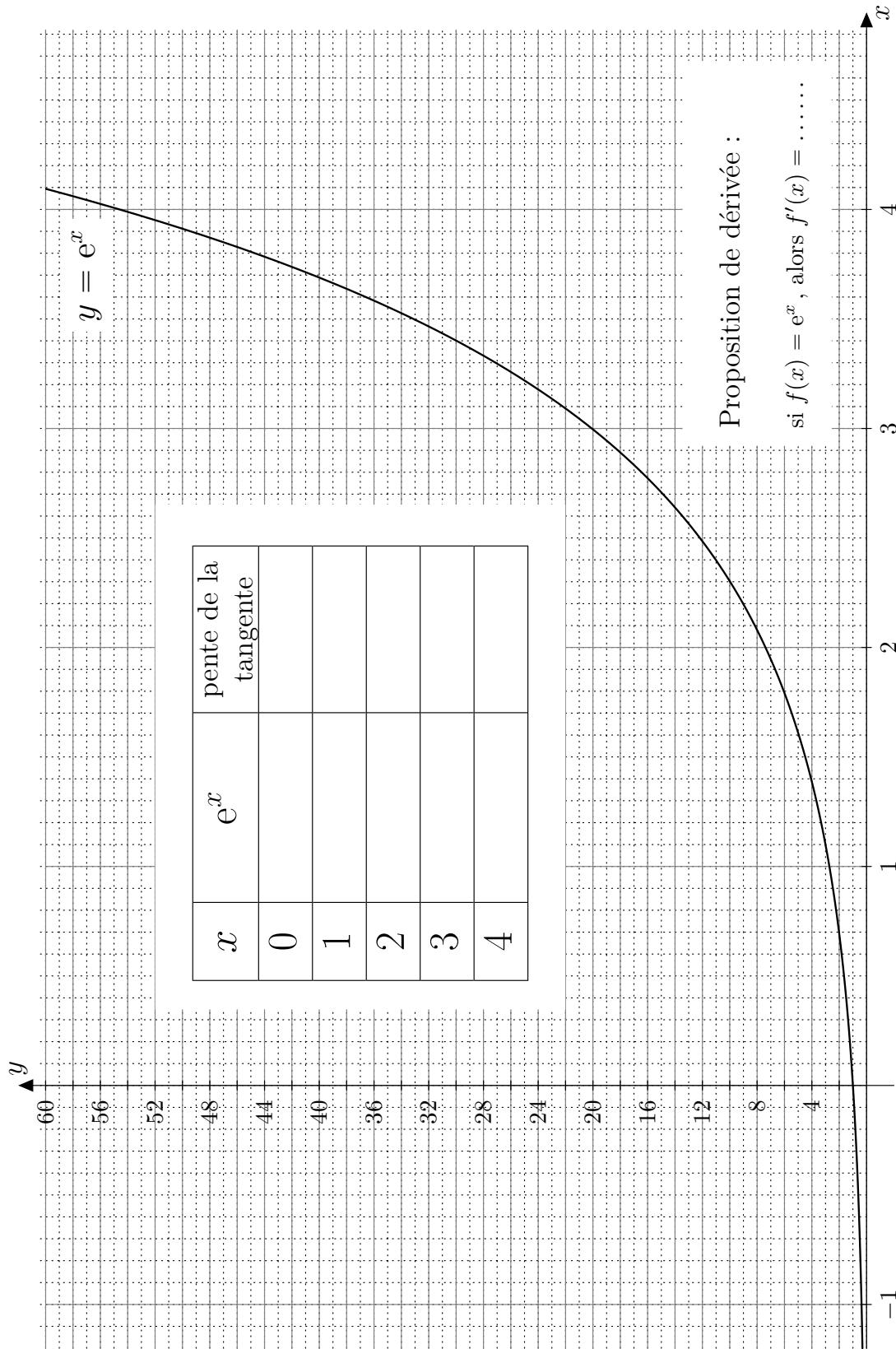
Démarche: Formellement, nous devrions déterminer la dérivée f' de ces fonctions exponentielle et logarithme en utilisant la formule :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

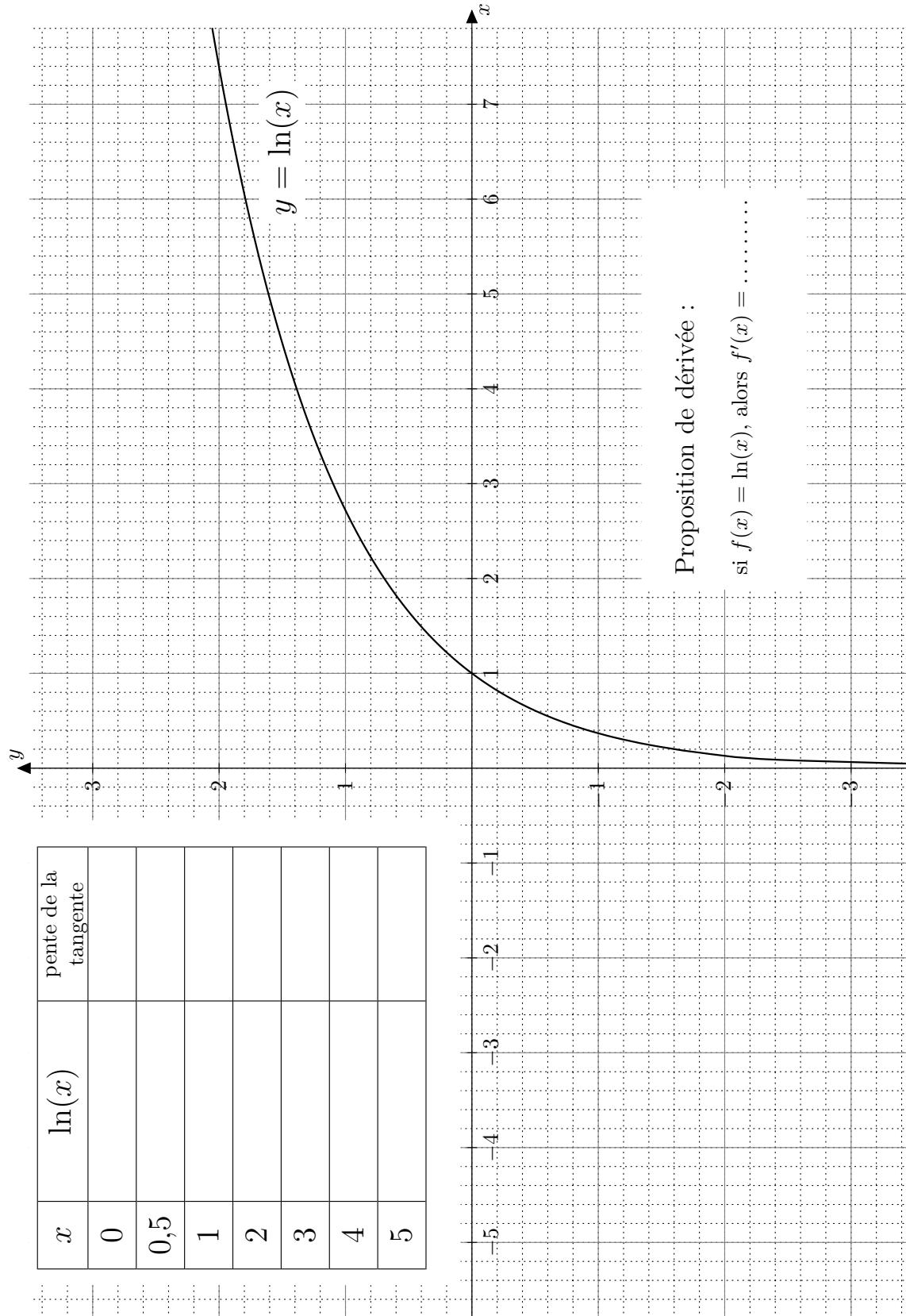
En fait, nous nous contenterons d'estimer la valeur de la **pente de la tangente** à $f(x) = e^x$ et à $g(x) = \ln(x)$ en certains points puis nous tenterons d'en déduire la fonction dérivée f' et g' .

Exercice 8.3:

À l'aide du graphique, compléter le tableau de valeurs de la fonction f définie par $f(x) = e^x$ ainsi que la pente de la tangente en ces points. En déduire une proposition pour la dérivée de f .



Exercice 8.4: À l'aide du graphique, compléter le tableau de valeurs de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)$ ainsi que la pente de la tangente en ces points. En déduire une proposition pour la dérivée de f .



1^{re} règle: La dérivée de la fonction exponentielle :

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$$

2^e règle: La dérivée de la fonction logarithme :

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

3^e et 4^e règle: La dérivée de fonctions composées en e^{\dots} et $\ln(\dots)$.

$$g(x) = e^{f(x)} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$g(x) = \ln(f(x)) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Exemple 4: a) Soit $f(x) = e^{3x}$

$$\text{alors } f'(x) = e^{3x} \cdot (3x)' = e^{3x} \cdot 3 = \underline{\underline{3e^{3x}}}$$

b) Soit $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-2x}$

$$\begin{aligned} \text{alors } f'(x) &= (x^2 + x + 1)' \cdot e^{-2x} + (x^2 + x + 1)(e^{-2x})' \\ &= (2x + 1) \cdot e^{-2x} + (x^2 + x + 1) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) \\ &= e^{-2x} \cdot (2x + 1 - 2x^2 - 2x - 2) = \underline{\underline{(-2x^2 - 1)e^{-2x}}} \end{aligned}$$

c) Soit $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$

$$\text{alors } f'(x) =$$

d) Soit $f(x) = \ln(5x)$

$$\text{alors } f'(x) = \frac{1}{5x} \cdot (5x)' = \frac{1}{\underline{\underline{x}}}$$

e) Soit $f(x) = \ln(2x^2)$

$$\text{alors } f'(x) =$$

Exemple 4 (suite): f) Soit $f(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x) + 2}$

$$\begin{aligned} \text{alors } f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}(\ln(x) + 2) - (\ln(x) - 1)\frac{1}{x}}{(\ln(x) + 2)^2} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(x) + 2 - \ln(x) + 1}{(\ln(x) + 2)^2} = \frac{3}{x(\ln(x) + 2)^2} \end{aligned}$$

Exercice 8.5: Déterminer l' E_D , les zéros et la dérivée de f définie par :

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = e^{5x}$ | b) $f(x) = e^{x^2}$ |
| c) $f(x) = e^{1/x}$ | d) $f(x) = \ln(-4x + 5)$ |
| e) $f(x) = \ln(x^2 - x)$ | f) $f(x) = x^2 e^{1/x}$ |
| g) $f(x) = x(\ln(x) - 1)$ | h) $f(x) = \frac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1}$ |
| i) $f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$ (<i>indication : il s'agit d'une ... maquillée !!</i>) | |

Exercice 8.6:

- a) Démontrer que la tangente à la courbe $y = e^x$ au point d'abscisse $x = 1$ passe par l'origine.
- b) Démontrer que la tangente à la courbe $y = \ln(x)$ au point d'abscisse $x = e$ passe par l'origine.

Exercice 8.7: La capacité pulmonaire C d'une personne en fonction de son âge est donnée par la fonction :

$$C(t) = \frac{110(\ln(t) - 2)}{t} \quad \text{avec } t \text{ l'âge exprimé en année et } t > e^2$$

- a) Calculer la capacité pulmonaire à 10, 20, 30 et 70 ans.
- b) Calculer l'âge auquel la capacité pulmonaire d'une personne est maximale.

Devinette: Logarithme et exponentielle sont au restaurant. Qui paie l'addition ?

... C'est exponentielle car logarithme n'épêche rien. . .

8.3 Calculs de limites (utiles pour les études fonctions)

- Rappel:**
- $\frac{\text{nbre pos}}{+\infty} = 0^+$ $\frac{\text{nbre pos}}{-\infty} = 0^-$
 - $\frac{\text{nbre neg}}{+\infty} = 0^-$ $\frac{\text{nbre neg}}{-\infty} = 0^+$
 - $\frac{\text{nbre pos}}{0^+} = +\infty$ $\frac{\text{nbre pos}}{0^-} = -\infty$
 - $\frac{\text{nbre neg}}{0^+} = -\infty$ $\frac{\text{nbre neg}}{0^-} = +\infty$

Exercice 8.8:

Compléter les limites suivantes :

- a)
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} g(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = \dots \dots \dots$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots \dots \dots$$
- b)
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} g(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = \dots \dots \dots$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots \dots \dots$$
- c)
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} g(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = \dots \dots \dots$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots \dots \dots$$
- d)
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} g(x) = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = \dots \dots \dots$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots \dots \dots$$
- e)
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} g(x) = 0^- \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = \dots \dots \dots$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots \dots \dots$$
- f)
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} g(x) = 0^- \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = \dots \dots \dots$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots \dots \dots$$

$$\text{g)} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} g(x) = \infty \end{array} \right\} \implies \bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = \dots \dots \dots$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots \dots \dots$$

$$\text{h)} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} g(x) = 0 \end{array} \right\} \implies \bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = \dots \dots \dots$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots \dots \dots$$

Devinette (suite):

Nos amis Logarithme et Exponentielle sont maintenant sur un bateau. Tout à coup, Logarithme est terrifié : « Attention, on dérive ! ». Que va répondre Exponentielle ?

« Et Logarithme d'ajouter « Moi, c'est l'inverse »
« Je m'en fiche, ça ne change rien... »

Cas indéterminés:

Lors du calcul de limites, il arrive que l'on obtienne une expression que l'on **ne** peut pas **directement déterminer**. Il faudra les étudier au cas par cas pour “lever” les **indéterminations**.

Voici 3 cas d’indétermination :

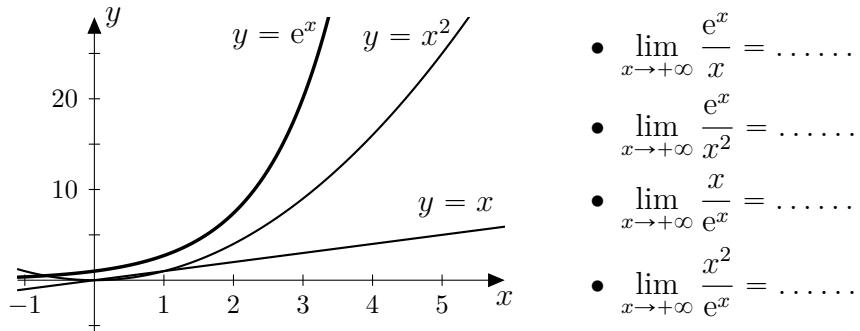
$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad 0 \cdot (\pm\infty)$$

Exercice 8.9:

Le but de cet exercice est de “lever” les limites indéterminées suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

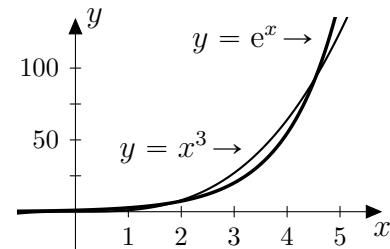
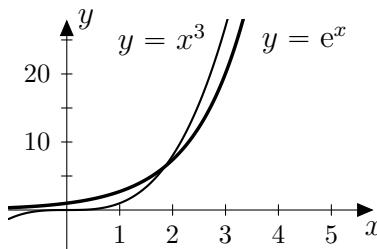
1^{er} cas : $n = 1$ et 2 : En observant les graphiques suivants, compléter les limites :



Vous constatez que “ e^x croît plus vite que x et x^2 ”.

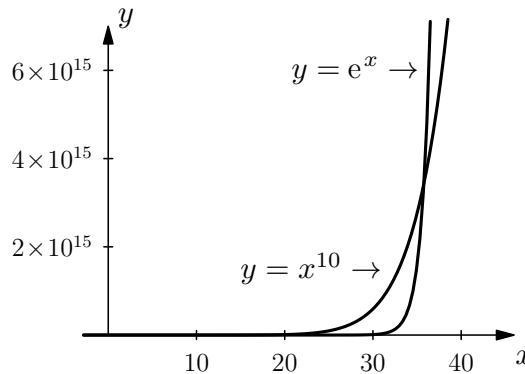
Ceci va-t-il se confirmer également avec x^3 ?

2^e cas : $n = 3$: Justifiez-le à l'aide des deux graphes suivants :



Laquelle des deux fonctions semble-t-elle croître le plus rapidement ?

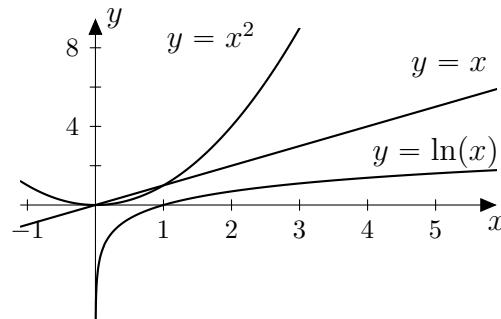
3^e cas : $n = 10$: En observant le graphique suivant, compléter les limites :



- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{10}} = \dots \dots$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10}}{e^x} = \dots \dots$

Exercice 8.10: En observant le graphe, compléter les limites (pour $n \in \mathbb{N}$)



- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \dots \dots$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} = \dots \dots$

La règle du podium: Les deux exercices précédents nous ont permis d'observer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} = +\infty$$

Vous trouverez encore d'autres limites pratiques dans votre formulaire.

Exercice 8.11: Les limites suivantes sont-elles déterminées ?
À l'aide de votre calculatrice, estimer ces limites

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-5x}$

Exemple 5: Calculer les limites suivantes

La règle du podium

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{-x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{1/x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{4x}$

Exercice 8.12:

Calculer les limites suivantes, en essayant, si nécessaire, de se rapporter à une situation de “podium” du type :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x)}, \quad \dots$$

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^{2x}}$ | b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(x^3)$ | c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} x$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(-x)$ | e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{3x-5}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{x^2}$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} x^2$ | h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$ | |

Encore 2 formules:

- $\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow a} \ln(f(x)) = \ln(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$

Exemple 6: Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{3x+4}{x-2}}$ **Exercice 8.13:**

Calculer les limites suivantes :

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$ | b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2}}$ | c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-2x}{x^2 - 5}}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{3x^2 + 2}{2x}}$ | e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 2}\right)$ | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ |

Exercice 8.14:

Le but de cet exercice est d’“estimer” $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$

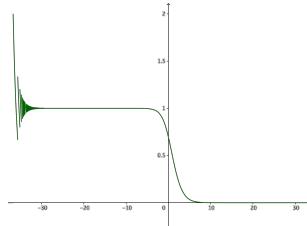
- a) en “remplaçant” naïvement x par $-\infty$
- b) à l'aide de la calculatrice en complétant le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-1	-10	-20	-25	-30
$\frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$					

c) à l'aide de 4 des représentations graphiques suivantes :

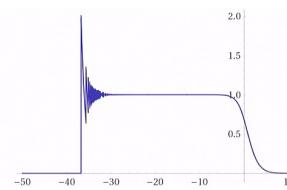


GeoGebra



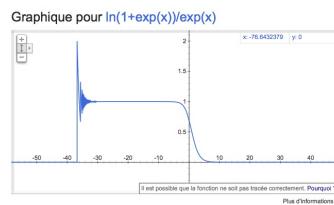
www.geogebra.at

WolframAlpha[®]



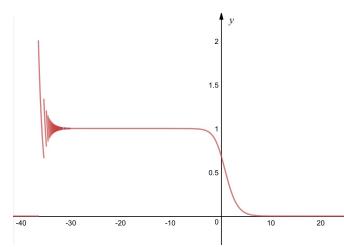
www.wolframalpha.com

Google



www.google.com

desmos



www.desmos.com/calculator

d) Finalement, à l'aide de WolframAlpha, nous obtenons :

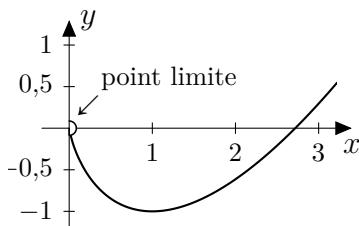
Limit
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log_e(1 + e^x)}{e^x} = 1$

e) Comment expliquez-vous ces *interprétations délicates* ?

8.4 Études de fonctions exponentielles

Méthodologie:

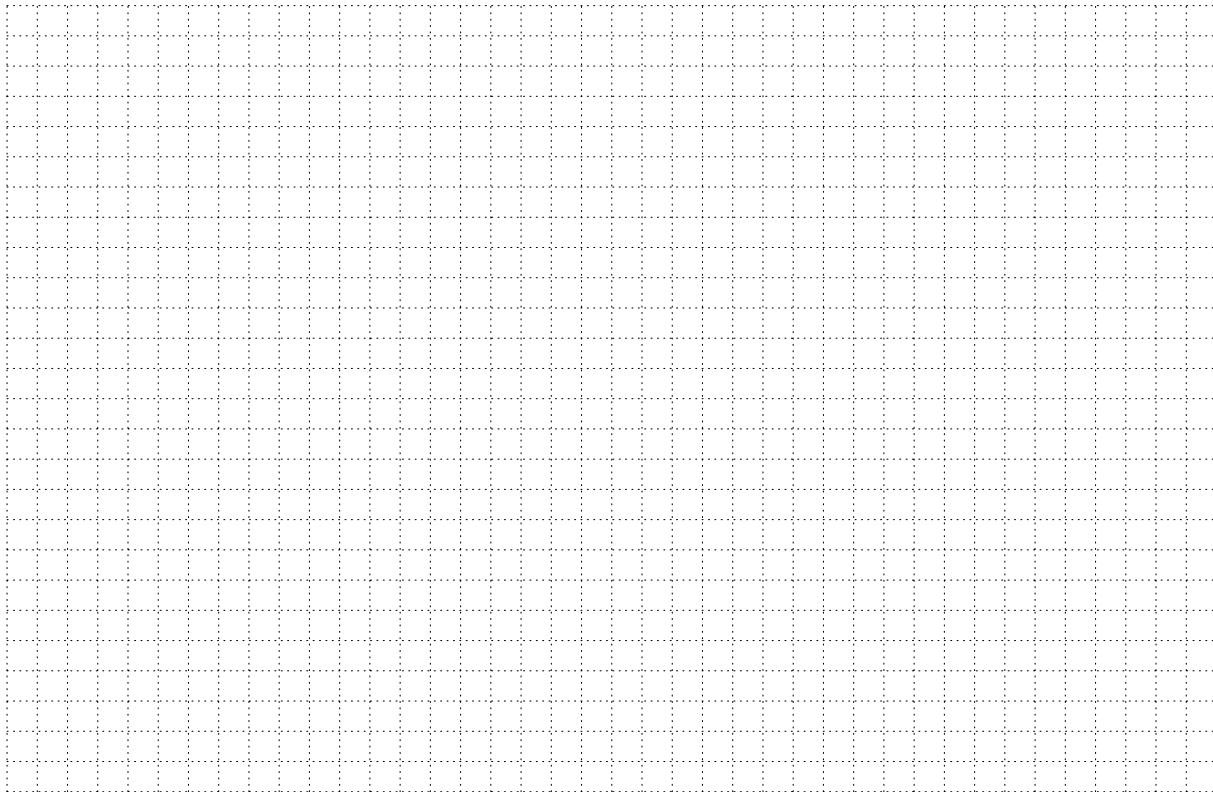
L'étude d'une fonction exponentielle admet la même marche à suivre que celle étudiée lors de fonctions polynomiales ou rationnelles. On mentionnera toutefois :



- a) Il n'y aura **pas de AO** à déterminer car la division de polynômes ne peut s'appliquer dans ce cas.
- b) La recherche de(s) **AH** doit être effectuée en deux étapes :
 - l'éventuelle **AHG** à l'aide de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 - l'éventuelle **AHD** à l'aide de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- c) Contrairement aux fonctions rationnelles, le graphique d'une fonction exponentielle peut débuter brusquement depuis un point que nous nommerons **point limite**.

Exemple 7: Étudier la fonction f définie par : $f(x) = e^{\frac{x^2 + x - 2}{6x - 12}}$.

Pour un tracé plus précis, calculer en plus $\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x)$



Exercice 8.15: Étudier les fonctions f définies par :

a) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = (x^2 - 6)e^{-2x}$

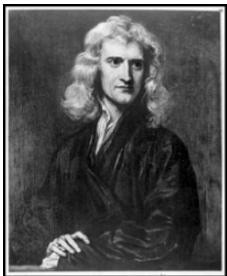
c) $f(x) = e^x(6 - e^x)$

d) $f(x) = e^{\frac{2}{x^2 - 4}}$

Primitives et intégrales

9.1 «À quoi ça sert ?»

Un peu d'histoire:

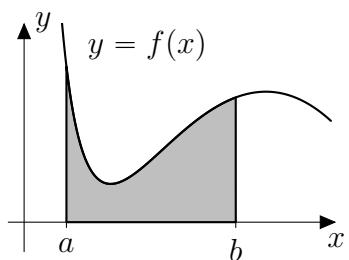


Isaac Newton
(1643-1727)

Les calculs d'aire de figures géométriques simples comme les rectangles, les polygones et les cercles sont décrits dans les plus anciens documents mathématiques connus. La première réelle avancée au-delà de ce niveau élémentaire a été faite par *Archimède*, le génial savant grec. Grâce à la technique *d'Archimède*, on pouvait calculer des aires bornées par des paraboles et des spirales. Au début du XVII^e siècle, plusieurs mathématiciens ont cherché à calculer de telles aires de manière plus simple à l'aide de limites. Cependant, ces méthodes manquaient de généralité. La découverte majeure de la résolution générale du problème d'aire fut faite indépendamment par *Newton* et *Leibniz* lorsqu'ils s'aperçurent que l'aire sous une courbe pouvait être obtenue en inversant le processus de dérivée.

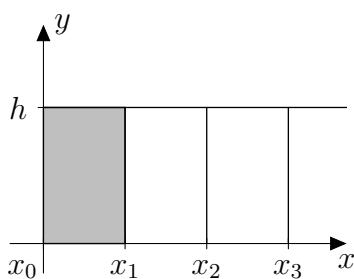
Cette découverte, qui marqua le vrai début de l'analyse, fut répandue par *Newton* en 1669 et ensuite publiée en 1711 dans un article intitulé *De Analysis per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*. Indépendamment, *Leibniz* découvrit le même résultat aux environs de 1673 et le formula dans un manuscrit non publié daté du 11 novembre 1675.

Notre objectif dans ce chapitre sera de pouvoir calculer l'aire d'un domaine sous une courbe $y = f(x)$ bornée entre deux droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.



9.2 3 exemples pour débuter

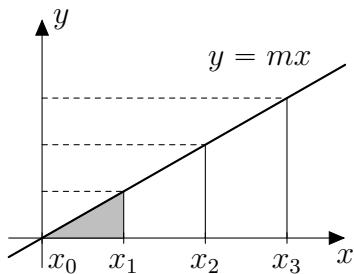
- a) Soit la fonction f définie par $f(x) = h$ où h représente une constante. Nous désirons calculer l'aire $A(x)$ sous la courbe $y = h$ comprise entre la borne $x_0 = 0$ et la deuxième borne variant $x = x_1, x_2, x_3, \dots$



- si $x = x_1 \implies A(x_1) = \dots$
- si $x = x_2 \implies A(x_2) = \dots$
- si $x = x_3 \implies A(x_3) = \dots$

En généralisant pour tout x , Si $f(x) = h \implies A(x) = hx$

- b) Soit la fonction f définie par $f(x) = mx$ où m représente la pente de la droite. Nous désirons calculer l'aire $A(x)$ sous la courbe $y = mx$ comprise entre la borne $x_0 = 0$ et la deuxième borne variant $x = x_1, x_2, \dots$.

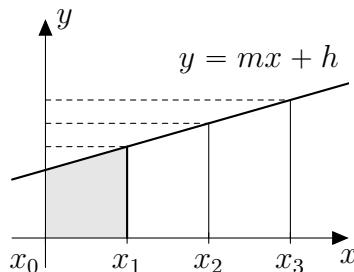


- si $x = x_1 \implies A(x_1) = \dots$
 - si $x = x_2 \implies A(x_2) = \dots$ etc...

En généralisant pour tout x :

$$\text{Si } f(x) = mx \implies A(x) = \frac{1}{2}mx^2$$

- c) Soit la fonction f définie par $f(x) = mx + h$. Nous désirons calculer l'aire $A(x)$ sous la courbe $y = mx + h$ comprise entre la borne $x_0 = 0$ et la deuxième borne variant $x = x_1, x_2, \dots$



En généralisant pour tout x :

$$\text{Si } f(x) = mx + h \implies A(x) = \frac{1}{2}mx^2 + hx$$

Exercice 9.1:

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x$. Déterminer l'aire $A(x)$ définie sous la courbe dans les 3 cas suivants :

- a) entre $x_0 = 0$ et $x_1 = 10$
 b) entre $x_0 = 0$ et $x_2 = 20$
 c) entre $x_1 = 10$ et $x_2 = 20$

Exercice 9.2:

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x + 4$. Déterminer l'aire $A(x)$ définie sous la courbe dans les 3 cas suivants :

- a) entre $x_0 = 0$ et $x_1 = 2$
 b) entre $x_1 = 2$ et $x_2 = 6$
 c) entre $x_0 = 0$ et $x_2 = 6$

Exercice 9.3:

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x - 4$. Déterminer l'aire $A(x)$ définie sous la courbe dans les 3 cas suivants :

Une bonne figure d'étude est vivement conseillée dans ce cas

- a) entre $x_0 = 0$ et $x_1 = 2$
- b) entre $x_1 = 2$ et $x_2 = 6$
- c) entre $x_0 = 0$ et $x_2 = 6$

Définition:

On nomme $A(x)$ **une intégrale indéfinie** de la fonction f .

On la note :

$$A(x) = \int f(x) dx$$

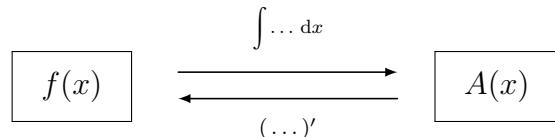
Les 3 premières règles:

Ainsi les 3 exemples précédents nous fournissent nos trois premières règles de calcul :

$$\begin{aligned} f(x) = b &\quad \xrightarrow{\int \dots dx} A(x) = bx \\ f(x) = ax &\quad \xrightarrow{\int \dots dx} A(x) = \frac{1}{2}ax^2 \\ f(x) = ax + b &\quad \xrightarrow{\int \dots dx} A(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx \end{aligned}$$

Constatations:

On observe ici le lien entre dérivée et intégrale. En effet en dérivant l'expression $A(x)$, on retrouve $f(x)$. On pourrait symboliser ceci sur le schéma suivant :



9.3 Les primitives

Nous allons maintenant oublier un petit moment la notion d'aire $A(x)$ et se concentrer sur la question suivante :

Soit la fonction f donnée, trouver la (ou les) fonction(s) F telle(s) que leur dérivée donne f .

Définition:

Une fonction F telle que $F'(x) = f(x)$ est **une primitive** de f .

Exemple 1: $\frac{3}{2}x^2$ est une primitive de $3x$, car $\left(\frac{3}{2}x^2\right)' = 3x$

Mais pourquoi une ???

- ☞ En fait, toute fonction de la forme $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \text{constante}$ est une primitive de $f(x) = 3x$.

Exemple 2: Vérifier ou déterminer les primitives suivantes :

a) $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ car

b) $\int 7x^4 dx = \frac{7}{5}x^5 + c$ car

c) $\int \frac{1}{x^2} dx =$

d) $\int \sqrt{x} dx =$

e) $\int \frac{3}{\sqrt{x}} dx =$

Exercice 9.4: Déterminer les primitives suivantes :

a) $\int 4 dx$ b) $\int 6x dx$ c) $\int x^2 dx$

d) $\int e^x dx$ e) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ f) $\int \frac{1}{x^2} dx$

g) $\int \sqrt[3]{x} dx$ h) $\int \frac{5}{\sqrt[3]{x}} dx$ i) $\int (2x)^3 dx$

Exercice 9.5: Les deux fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^2 \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x$$

sont-elles deux primitives d'une même fonction f ?

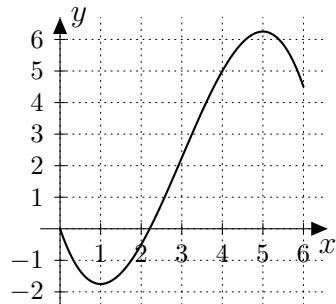
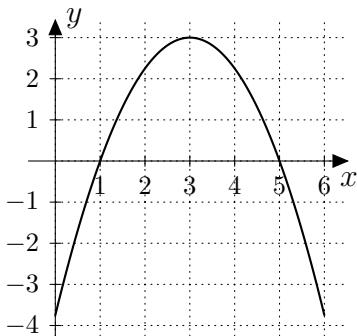
Exercice 9.6: Déterminer f sachant que :

- a) $\int f(x) dx = 5x^2 - 3x + c$
- b) $\int f(x) dx = x - \frac{1}{x} + c$
- c) $\int f(x) dx = \sqrt{x} + c$

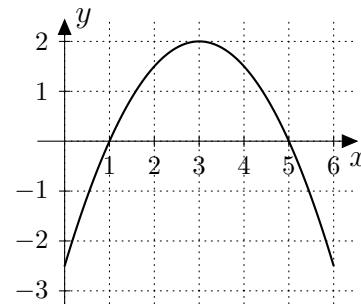
Exercice 9.7:

On a représenté ci-contre une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$.

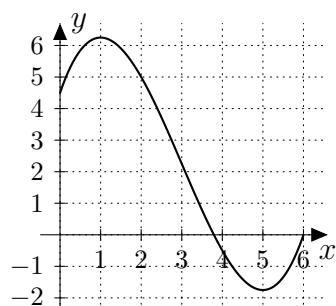
- a) Sachant que f est la dérivée d'une fonction F définie sur $[0 ; 6]$, déduire le tableau de croissance de F .
- b) Retrouver, parmi les 4 esquisses proposées ci-dessous, celles pouvant correspondre à F .



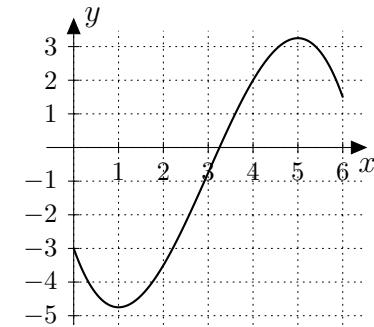
①



②



③



④

Calculs de primitives: La recherche d'une primitive n'est pas toujours facile, ni toujours possible. **Celles proposées ci-dessous découlent directement des règles de dérivation :**

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\boxed{① \int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{x^4}{5} - \frac{3x^3}{2} \, dx = \int \frac{x^4}{5} \, dx - \int \frac{3x^3}{2} \, dx = \dots$$

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

$$\boxed{② \int k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int f(x) \, dx}$$

$$\Leftrightarrow \int 17 \cdot x^{-5} \, dx = 17 \cdot \int x^{-5} \, dx = \dots$$

$$((f(x))^n)' = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

$$\boxed{③ \int (f(x))^n \cdot f'(x) \, dx = \frac{1}{n+1} (f(x))^{n+1} + c}$$

$$\Leftrightarrow \int (3x^2 + 5x - 1)^3 \cdot (6x + 5) \, dx = \dots$$

$$(\mathrm{e}^{f(x)})' = \mathrm{e}^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\boxed{④ \int \mathrm{e}^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx = \mathrm{e}^{f(x)} + c}$$

$$\Leftrightarrow \int 2x \mathrm{e}^{x^2} \, dx = \dots$$

$$(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\boxed{⑤ \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln(|f(x)|) + c}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{8}{4x-3} \, dx = \dots$$

$$(\sin(f(x)))' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\boxed{⑥ \int \cos(f(x)) \cdot f'(x) \, dx = \sin(f(x)) + c}$$

$$\Leftrightarrow \int x \cdot \cos(x^2) \, dx = \dots$$

$$(\cos(f(x)))' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\boxed{⑦ \int \sin(f(x)) \cdot f'(x) \, dx = -\cos(f(x)) + c}$$

$$\Leftrightarrow \int \sin(-x) \, dx = \dots$$

Exercice 9.8:

Déterminer les primitives suivantes :

- | | |
|--|--|
| a) $\int 3x^2 + 5x - 3 \, dx$ | b) $\int x(2x - 4) \, dx$ |
| c) $\int x(x + 3)(x - 3) \, dx$ | d) $\int (x + 3)^3 \, dx$ |
| e) $\int (1 - 2x)^2 \, dx$ | f) $\int (3x^2 + x)^3 (6x + 1) \, dx$ |
| g) $\int x (4x^2 + 3)^4 \, dx$ | h) $\int \sqrt{x + 3} \, dx$ |
| i) $\int \frac{1}{\sqrt{3x + 1}} \, dx$ | j) $\int \frac{2}{x} \, dx$ |
| k) $\int \frac{1}{3x + 1} \, dx$ | l) $\int 3 e^{3x} \, dx$ |
| m) $\int 2x e^{x^2+x} + e^{x^2+x} \, dx$ | n) $\int \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} \, dx$ |
| o) $\int 2x \cos(3x^2) \, dx$ | p) $\int 2 \sin(x) \cos(x) \, dx$ |

Exercice 9.9:

Déterminer la fonction f sachant que :

- a) $f'(x) = 3x^2 - 4$ et $f(5) = 54$
- b) $f'(x) = 5 - x$ et $f(-2) = -f(2)$

Exercice 9.10:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x - 7}{x^2 - 2x - 3}$$

- a) Préciser pourquoi la primitive de f n'est pas directement calculable.
- b) Déterminer a et b vérifiant que :

$$f(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3} + \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 3}$$

- c) En déduire une primitive de f .
- d) Montrer que $F(x) = \frac{9}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x-3| + c$ est également une primitive de f .

Définition: On appelle **intégrale indéfinie** de la fonction f et on note $\int f(x) dx$ toute expression de la forme $F(x) + C$ où F est une primitive de f et C une constante.

Exercice 9.11: On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$$

Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$F(x) = \ln(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + c$$

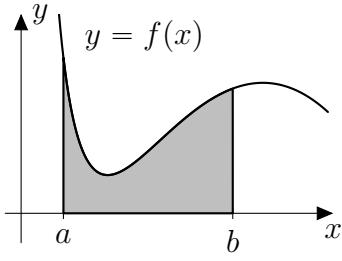
Montrer que F est l'intégrale indéfinie de f .

9.4 L'intégrale définie

Introduction:

Au début du chapitre, nous avons calculé des aires limitées par des segments de droites.

Le problème n'est pas aussi simple lorsque l'on considère un domaine limité par des courbes.

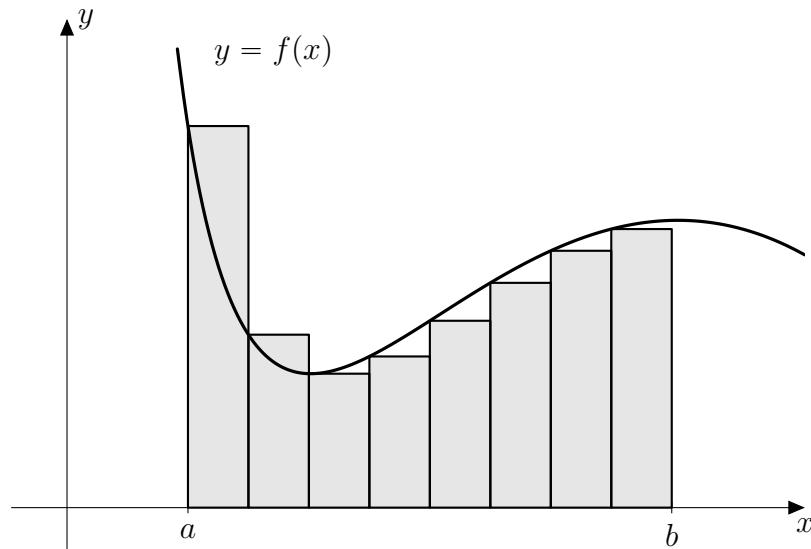


L'idée est de subdiviser l'intervalle $[a ; b]$ en plusieurs sous-intervalles de même largeur $[x_0 ; x_1], [x_1 ; x_2], \dots, [x_{n-1} ; x_n]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.

La largeur de chaque sous-intervalle est égale à la largeur de l'intervalle $[a ; b]$ divisé par le nombre de sous-intervalles, c'est-à-dire :

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

Pour chaque $i = 0, 1, \dots, n-1$, on dessine un rectangle ayant comme base le segment $[x_i ; x_{i+1}]$ et comme hauteur $f(x_i)$



Ainsi l'aire du i^{e} rectangle (hauteur \cdot largeur) vaut

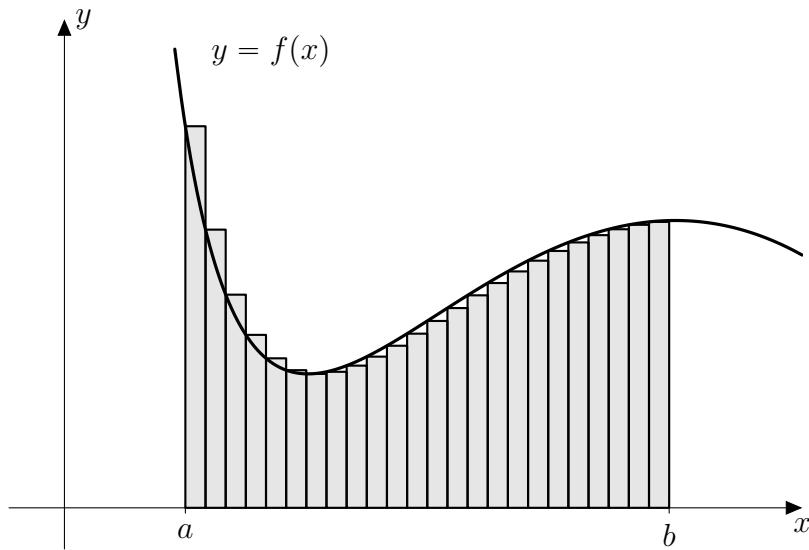
$$\text{Aire } = f(x_i) \cdot \Delta x$$

Rappel :

$$\sum_{i=0}^3 x_i = x_0 + x_1 + x_2 + x_3$$

L'aire totale des n rectangles est donc $A(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$

Lorsque le nombre n de sous-intervalles augmente, la largeur de chaque sous-intervalle diminue et l'approximation de l'aire sous la courbe devient plus précise.



À la limite, nous pouvons “espérer” obtenir la valeur exacte de l’aire A :

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Définition: On appelle **intégrale définie** de la fonction f pour x allant de a à b le calcul de la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

que l’on notera :

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

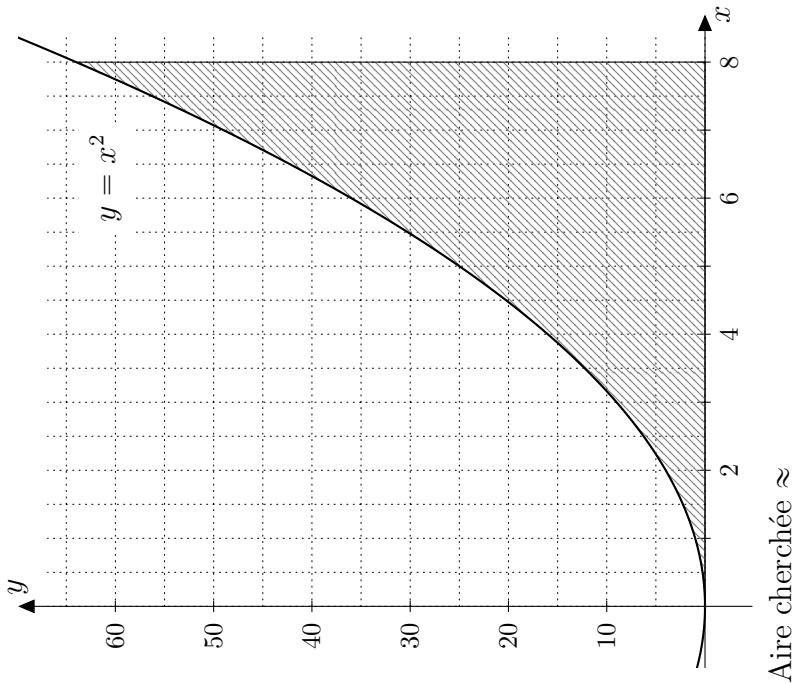
- Les nombres a et b sont appelés **bornes d’intégration** et x **variable d’intégration**.
- dx est un symbole exprimant que l’on intègre par rapport à x et il correspond au symbole Δx de la somme précédente.

Exercice 9.12:

Reproduire la démarche précédente afin d'approximer l'aire sous la parabole à l'aide de rectangles (bordé par la gauche puis par la droite).

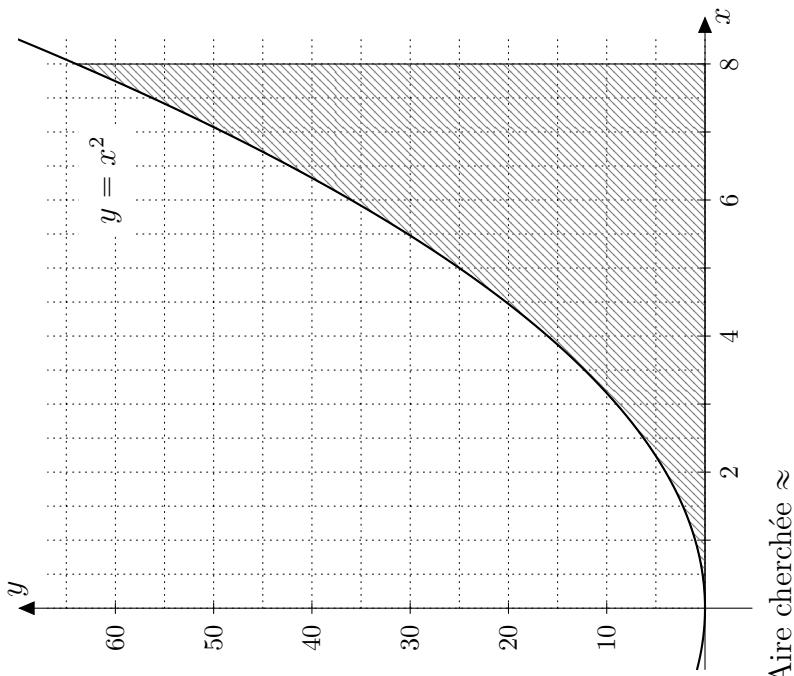
Le but de cet exercice est d'approximer la valeur de l'aire hachurée sous la courbe $y = x^2$ pour $x \in [0; 8]$

Approumons cette aire pour $\Delta x = 1/2$



Aire cherchée \approx

Approumons cette aire pour $\Delta x = 1$



Aire cherchée \approx

Constatation: L'usage de la définition de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

se révèle être très peu pratique, car demandant des calculs très longs. Cependant, pour certaines fonctions (pas toutes), il existe une alternative plus simple, l'utilisation de la primitive donnée par le théorème suivant :

Théorème: **Théorème fondamental du calcul intégral :**

Soit une fonction f continue définie sur l'intervalle $[a ; b]$. Alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f .

Exemple 3:

a) $\int_0^4 x dx = \frac{1}{2}x^2 + c \Big|_0^4 = (8 + c) - (0 + c) = \underline{\underline{8}}$

On voit sur cet exemple que la constante c n'a pas d'influence. On se permettra alors de ne plus l'indiquer.

b) $\int_2^7 \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) \Big|_2^7 = \ln(7) - \ln(2) = \underline{\underline{\ln\left(\frac{7}{2}\right)}}$

c) $\int_0^1 e^{-u} du = \dots \Big|_0^1 = \dots$

Exercice 9.13:

Calculer les intégrales définies suivantes :

a) $\int_1^4 x^2 dx$

b) $\int_0^3 3x^2 dx$

c) $\int_1^5 \frac{x^2}{2} dx$

d) $\int_0^1 \frac{3x^3}{5} dx$

e) $\int_0^2 2x^3 - 3x^2 + x - 3 dx$

f) $\int_{-1}^2 u^2 + 1 du$

g) $\int_{-2}^2 v^3 - 3v dv$

h) $\int_{-3}^3 \frac{3x^2}{5} + 4 dx$

i) $\int_0^\pi \sin(x) dx$

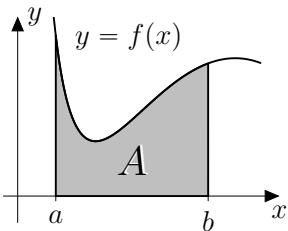
j) $\int_{-\pi}^\pi \cos(2x) dx$

Exercice 9.14: Calculer les intégrales définies suivantes :

- | | |
|--|---|
| a) $\int_0^2 (1-x)^3 dx$ | b) $\int_0^3 \sqrt{1+x} dx$ |
| c) $\int_1^3 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} dx$ | d) $\int_0^{2\pi} x \cdot \cos(x^2) dx$ |
| e) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$ | f) $\int_{-3}^2 e^{-2u} du$ |
| g) $\int_{-1}^{-5} \frac{1}{3v} dv$ | h) $\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^3} dx$ |

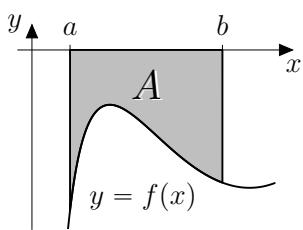
9.5 Le calcul de l'aire géométrique “sous une courbe”

Lorsque l'on calcule une intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$, on obtient donc une aire. Trois cas de figure vont apparaître :



1^{er} cas : Si $f(x) \geq 0$ sur $[a ; b]$,

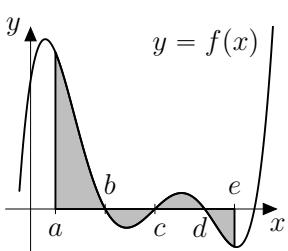
$\int_a^b f(x) dx$ est un nombre positif qui représente l'aire A sous la courbe.



2^e cas : Si $f(x) \leq 0$ sur $[a ; b]$,

$\int_a^b f(x) dx$ est un nombre négatif. Pour calculer l'aire A sous la courbe, il s'agira donc de proposer un changement de signe :

$$A = - \int_a^b f(x) dx$$



3^e cas : Si f change de signe sur $[a ; e]$,

l'aire totale est égale à la somme des aires de chaque “morceau” avec les éventuelles corrections de signe. Ainsi :

$$A = \int_a^b f(x) dx + \left(- \int_b^c f(x) dx \right) + \int_c^d f(x) dx + \left(- \int_d^e f(x) dx \right)$$

Exemple 4: Calculer l'aire géométrique comprise entre la courbe $y = x^2 - 2x$, l'axe Ox et les droites $x = 0$ et $x = 4$.

Exercice 9.15: Calculer l'aire géométrique comprise entre la courbe $y = -x^2 + x + 6$, l'axe Ox et les droites $x = -5$ et $x = 5$.

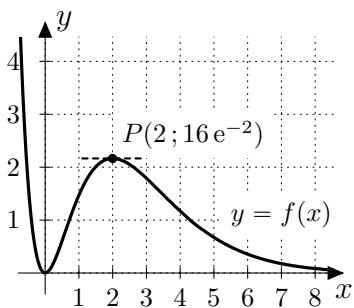
Exercice 9.16: Calculer l'aire géométrique du domaine borné compris entre l'axe Ox et le graphe de la fonction f .

Il est vivement conseillé d'esquisser la fonction f dans chaque cas.

- a) $f(x) = -3x^2 + 2x + 5$
- b) $f(x) = 2x^2 - x^3 - x^4$
- c) $f(x) = 6x + x^2 - x^3$

Exercice 9.17: On définit la fonction f sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x} \quad \text{avec } a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$



- a) À l'aide de l'esquisse représentée ci-contre, déterminer les valeurs de a , b et c .

- b) Montrer que la fonction F définie ci-dessous est une primitive de f :

$$F(x) = -4(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

- c) Calculer l'aire de la région du plan délimitée par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$.

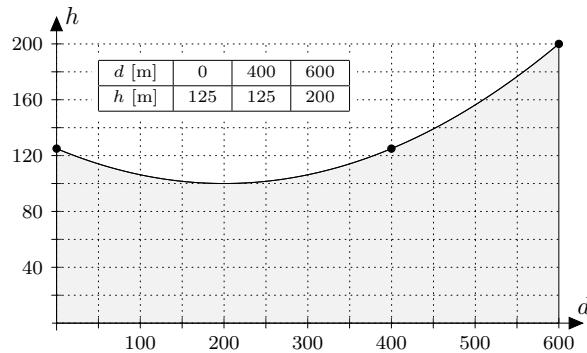
Exercice 9.18: Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

a) $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$
si $b \in [a ; c]$ et $f(x) \geq 0$

b) $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ si $f(x) \geq 0$ sur $[a ; b]$

c) $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a ; b]$

Exercice 9.19: On voudrait niveler (à plat) le terrain représenté ci-dessous.



- a) À l'aide des 3 pts obtenus par un géomètre, déterminer la fonction du 2^e degré qui modélise au mieux ce terrain.
 b) À quelle hauteur faut-il situer le terrain nivelé pour que les remblais équilibrent exactement les déblais ?

Remarque: L'exercice précédent peut se généraliser en un théorème classique d'intégration : **Le Théorème de la moyenne :**

Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a ; b]$, il existe un réel c compris entre a et b vérifiant :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Graphiquement, une interprétation de ce théorème est que l'aire algébrique sous la courbe $y = f(x)$ est égale à celle d'un rectangle de base $[a ; b]$ et dont la hauteur est l'ordonnée d'un point "moyen" de la courbe.

Dans l'exercice précédent, il existe même 2 valeurs de c vérifiant ce théorème qui sont :

$$c_1 = \dots \text{ et } c_2 = \dots$$

9.6 Le calcul de l'aire géométrique entre deux courbes

Exemple 5: Calculer l'aire géométrique du domaine borné compris entre les courbes :

$$y = x^2 \text{ et } y = \sqrt{x}$$

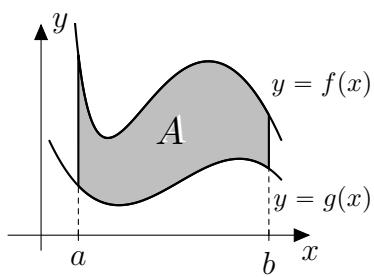
Constatation: Dans ce dernier exemple, nous avons calculé l'aire entre deux courbes à l'aide du calcul :

$A = \text{« aire de la plus haute »} - \text{« aire de la plus basse »}$

Généralisons ceci dans le théorème suivant :

Théorème:

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a ; b]$, telle que $f(x) \geq g(x)$ sur $[a ; b]$. Alors l'aire A du domaine borné par les graphes de f et de g entre les droites $x = a$ et $x = b$ vaut :



$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

Question:

Cette formule est assez convaincante lorsque les 2 fonctions f et g sont toutes deux situées dans les 2 premiers quadrants.

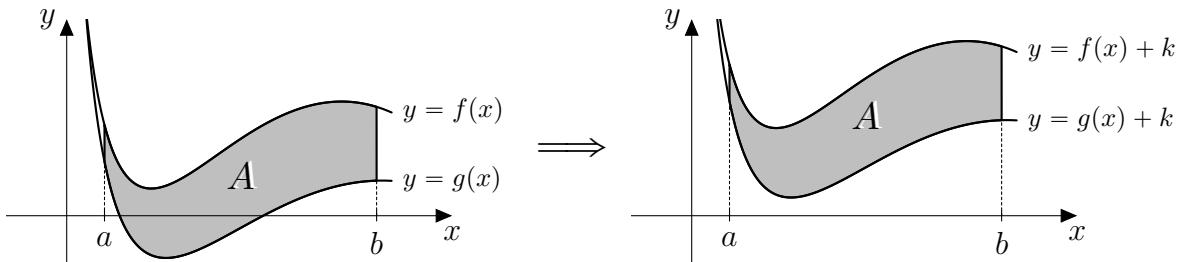
Qu'en est-il dans le cas où g et éventuellement f prennent des valeurs négatives ?

Doit-on modifier des signes ?

Réponse: Non, il n'est pas nécessaire de "corriger" la formule.

On peut imaginer translater les graphes de f et g d'une même constante k de telle sorte que $f(x) + k \geq 0$ et $g(x) + k \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$.

Observons ceci sur la figure suivante :



Exercice 9.20:

Calculer l'aire géométrique du domaine délimité par les deux courbes

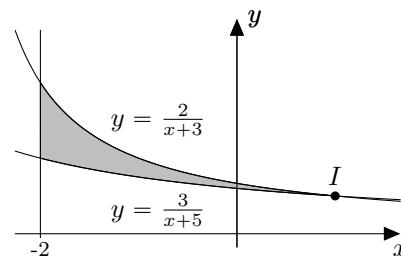
- a) $y = x^2 - 4x + 5$ et $y = 5 + 2x - x^2$
- b) $y = x^3 - x^4$ et $y = x - x^2$
- c) $2x^2 + x + 4y - 3 = 0$ et $x - 4y - 1 = 0$

Exercice 9.21:

Calculer l'aire géométrique du domaine compris entre les droites $x = 1$, $x = 2$, l'asymptote oblique et le graphe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$.

Exercice 9.22:

Déterminer l'aire de la région grisée.



Exercice 9.23:

Calculer l'aire géométrique du domaine compris entre les droites $x = 1$, $x = 2$, $y = 3x$ et la courbe d'équation $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$.

Exercice 9.24:

Calculer l'aire géométrique du domaine compris entre la courbe $y = x^3 + 2x^2 + x$ et la parabole d'axe parallèle à Oy , donnée par trois de ses points $A(-2; -2)$, $B(-1,5; 0)$, $C(0; 0)$.

Exercice 9.25: 1^{re} partie : Calcul d'une primitive

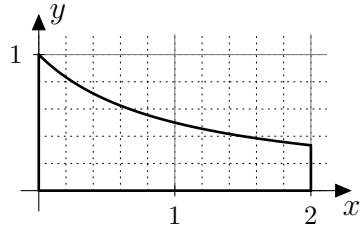
On note g la fonction définie sur $[0 ; 2]$ par $g(x) = \frac{x}{x+1}$

- a) Déterminer a et b tels que $g(x) = a + \frac{b}{x+1}$.
- b) En déduire une primitive de g .

2^e partie : Détermination du centre de gravité d'une plaque homogène

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

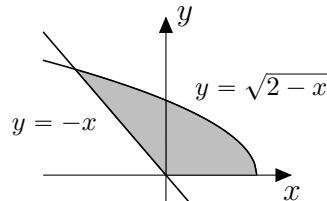
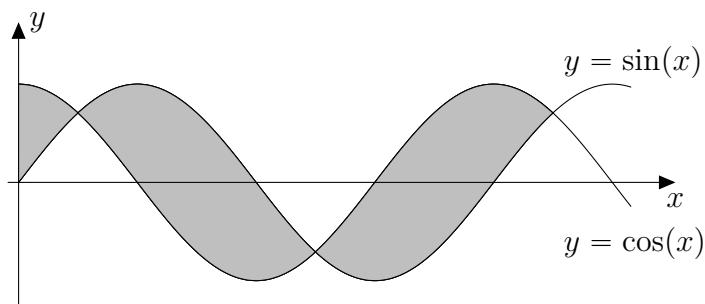


On considère une plaque homogène formée par l'ensemble de points $M(x ; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient les relations :

- $0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$ (cf. figure ci-contre).
- c) Soit A l'aire de la plaque exprimée en unité d'aire. Calculer A .
- d) Soit $G(x_G ; y_G)$ le centre de gravité de la plaque. On admettra que ses coordonnées sont données par les formules suivante :

$$x_G = \frac{1}{A} \int_0^2 x \cdot f(x) dx \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{2 \cdot A} \int_0^2 (f(x))^2 dx$$

Calculer les coordonnées du centre de gravité de la plaque puis représenter G sur la figure ci-contre.

Exercice 9.26: Déterminer l'aire de la région grisée.**Exercice 9.27:** Déterminer l'aire de la surface grisée.

9.7 Calcul d'intégrales avec un paramètre

Exemple 6: Calculer les réels $k > 0$ pour lesquels on a $\int_{-1}^2 kx^2 dx = \frac{2}{3}$

Exercice 9.28:

Calculer les réels $k > 0$ pour lesquels on a

a) $\int_4^k x + 9 dx = 28$

b) $\int_4^k x^2 - 3x + 7 dx = \frac{129}{2}$

c) $\int_2^8 \frac{k}{x} dx = 4 \ln(2)$

d) $\int_0^k x^2 + x + 1 dx = \int_0^k x^2 + 3 dx$

Exercice 9.29:

Pour quelle valeur du paramètre positif a la courbe d'équation

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + ax$$

délimite-t-elle avec l'axe Ox , dans le premier quadrant, un domaine d'aire égale à 6 ?

Exercice 9.30:

Calculer le réel $m > 0$ tel que l'aire du domaine limité par les graphes des fonctions f et g soit égale à 9 où

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = mx$$

Exercice 9.31: Soit la fonction f définie sur $E_D = [0 ; 18]$ par $f(x) = 2x - 2$.
Cette fonction bornée délimite avec l'axe Ox un domaine.

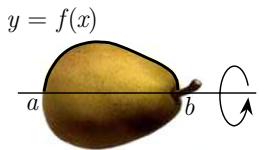
Déterminer la valeur de c pour laquelle la droite d'équation $x = c$ coupe ce domaine en deux parties de même aire.

Exercice 9.32: Déterminer $a \in \mathbb{R}_+^*$ pour que l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = a^2 - \frac{x^2}{4}$ et l'axe Ox soit égal à 8.

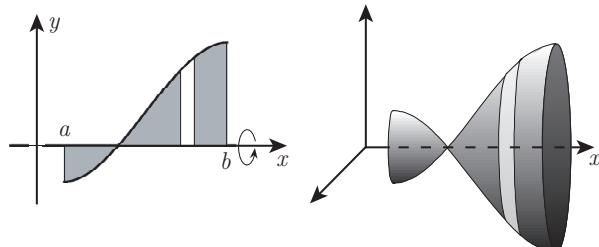
Application des intégrales

10.1 Les intégrales pour calculer des volumes de révolution

L'objectif de ce chapitre est de vous présenter une (parmi de multiples) application du calcul intégral.



Il s'agira de **calculer le volume** de solides générés par la révolution autour de l'axe Ox d'une portion de courbe $y = f(x)$ comprise entre $x = a$ et $x = b$.



Méthode des disques:

L'idée est la même que lorsque l'on cherchait l'aire sous une courbe. On va découper l'intervalle $[a ; b]$ en n sous-intervalles de largeur identique :

$$[x_0 ; x_1], [x_1 ; x_2], \dots, [x_{n-1} ; x_n], \text{ avec } x_0 = a \text{ et } x_n = b.$$

La largeur de chaque sous-intervalle est égale à la largeur de l'intervalle $[a ; b]$ divisé par le nombre de sous-intervalles, c'est-à-dire :

$$\Delta x = (b - a)/n.$$

Pour chaque $i = 0, 1, \dots, n - 1$, on dessine un rectangle ayant comme base le segment $[x_i ; x_{i+1}]$ et comme hauteur $f(x_i)$.

Lorsqu'ils tourneront autour de l'axe Ox , chacun de ces rectangles va définir un cylindre très fin (presque un disque) de volume :

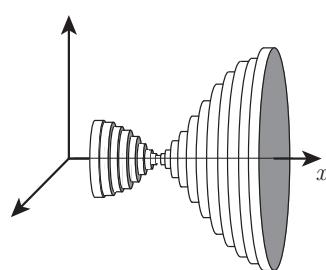
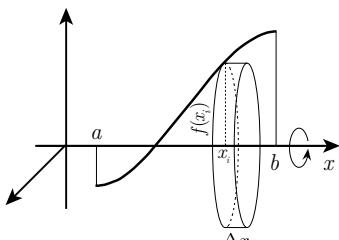
$$\mathcal{V} = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x.$$

Le volume du corps de révolution sera la somme des volumes de tous ces cylindres :

$$\mathcal{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \Delta x$$

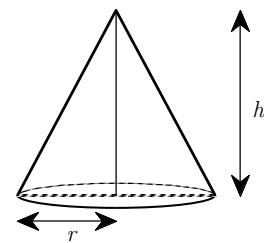
Qui se traduira (passage à la limite) en :

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



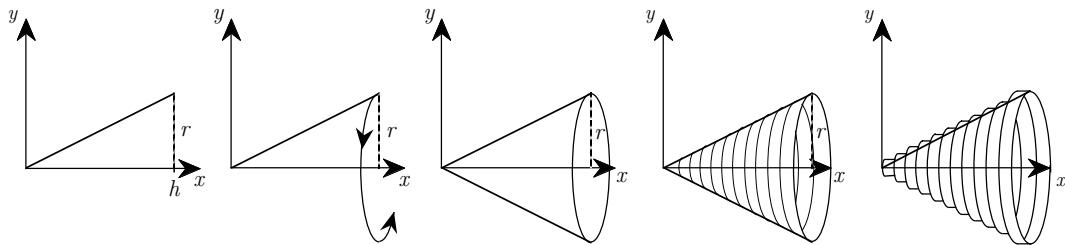
Exemple:

But: retrouver la formule “connue” du volume du cône:

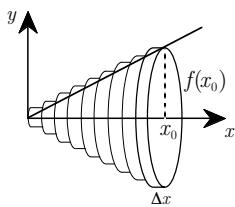
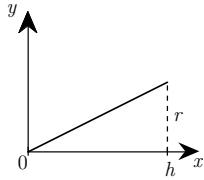


$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

① Démarche générale

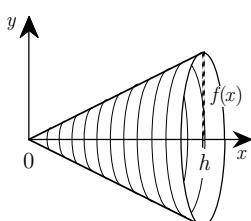


② Recherche de la fonction



③ Expression du volume “d'une tranche”

$$\text{Volume} =$$



④ Expression du volume du cône:

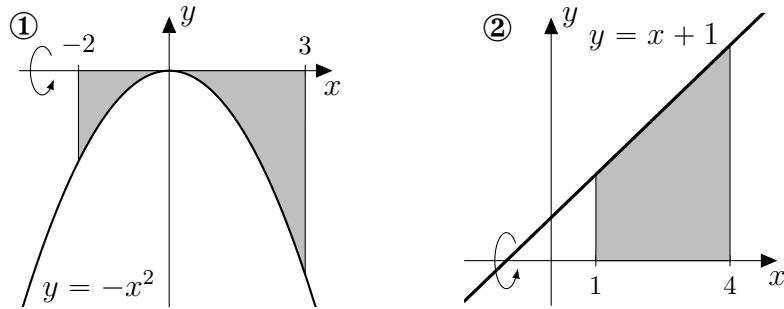
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$\text{Volume} =$$

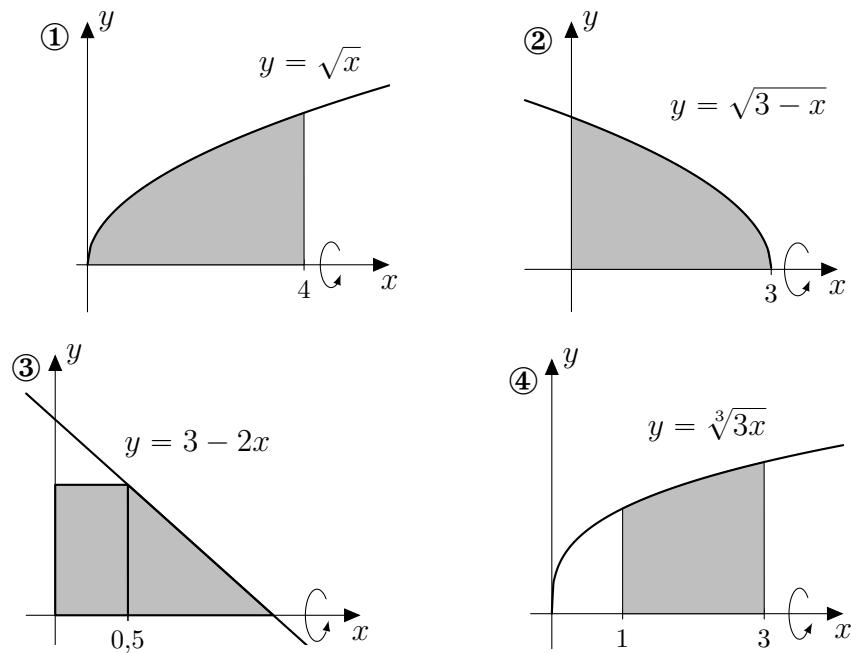


Exercice 10.1:

Esquisser l'objet obtenu par la révolution de la surface grisée autour de Ox puis calculer son volume :

**Exercice 10.2:**

Mêmes consignes

**Exercice 10.3:**

On désire démontrer que le volume de la sphère de rayon r vaut :

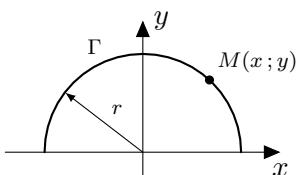
$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

a) Montrer que :

$M(x; y)$ est au **demi-cercle supérieur** Γ centré en O de rayon r



$$y = +\sqrt{r^2 - x^2}$$



*“Le volume de la sphère
Est égal si l'on sait faire
À quatre tiers pi r trois
Même si la sphère est en bois”*

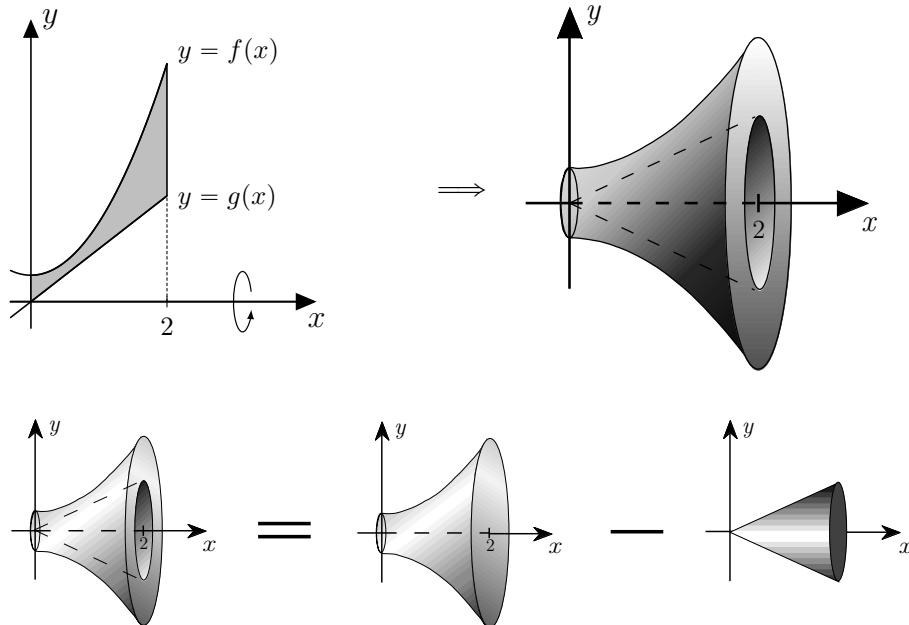
b) En déduire l'expression de la fonction f correspondante à ce demi-cercle ainsi que son ensemble de définition.

c) Calculer le volume de la sphère engendrée par la rotation de la courbe $y = f(x)$ autour de Ox

10.2 Calcul du volume d'un solide de révolution « creux »

Introduction: Nous allons maintenant calculer le volume engendré par la révolution autour de l'axe Ox de la surface comprise entre les deux courbes :

$$y = x^2 + 1/2 \quad \text{et} \quad y = x$$



$$\mathcal{V} = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 dx - \pi \int_0^2 [g(x)]^2 dx$$

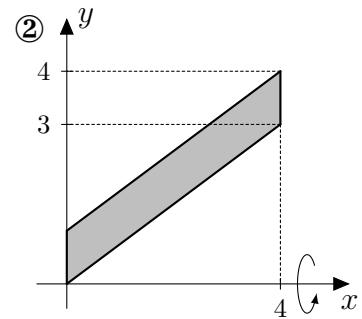
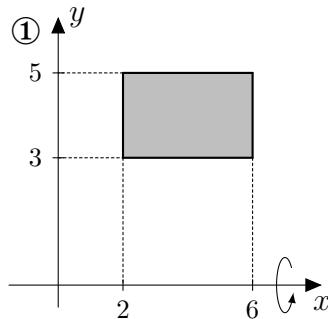
Ou plus rapidement

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx$$

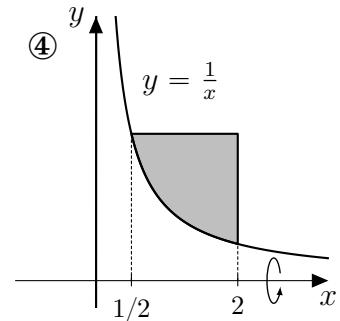
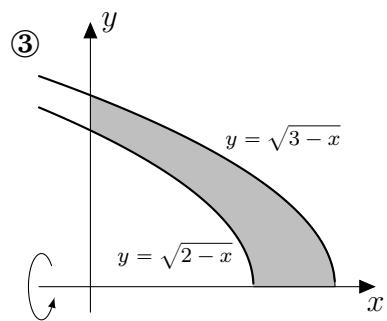
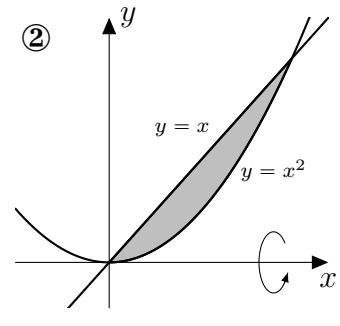
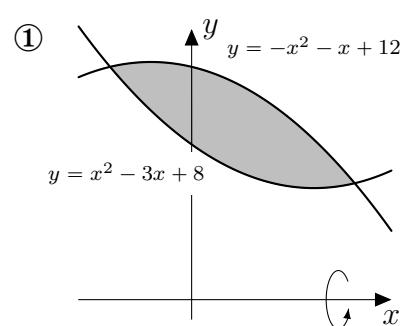
Dans notre cas :

Exercice 10.4:

Esquisser l'objet obtenu par la révolution de la surface grisée autour de Ox puis calculer son volume :

**Exercice 10.5:**

Mêmes consignes





Bibliographie

Bibliographie

1. CRM, *Analyse (1997)*, Édition du Tricorne
2. H. Bovet, *Analyse (1999)*, Polymaths ou sur Payot online

https://www.payot.ch/Detail/analyse-hubert_bovet-2080002732756

Site Web

1. Le site companion de ce polycopié : www.javmath.ch
Avec une version pdf de ce polycopié et quelques exercices supplémentaires ou animations.

2. Le site *Nymphomath* de Didier Müller :

<http://www.nymphomath.ch/MADIMU2/ANALY/INDEX.HTM>

Support de cours en pdf avec des exercices et leurs solutions

3. Une partie mathématique du site du collège *Sismondi* proposé par Serge Picchione :

<https://www.sismondi.ch/disciplines/mathematiques/espace-perso-profs/serge-picchione>

Support de cours en pdf avec des exercices et leurs solutions



Quelques éléments de solutions

A.7 Optimisation

Indices pour obtenir les réponses du Chapitre 7 :

Attention : Ces indices ne sont à utiliser que lorsque vous êtes coincés en cours d'exercice ou que la réponse finale obtenue n'est pas la bonne.

Ne les utilisez pas comme fiche-guide, vous risqueriez de court-circuiter les difficultés et ainsi ne pas acquérir l'autonomie souhaitée par ce type d'exercices.

- Exercice 7.1:**
- Appeler x le côté des carrés à enlever.
 - On obtient $\mathcal{V}(x) = x(18 - 2x)(22 - 2x)$.
 - On obtient $\mathcal{V}'(x) = 4(3x^2 - 40x + 99)$ et utiliser la formule du 2^e degré.

- Exercice 7.2:**
- Appeler x le plus petit des deux nombres.
 - On obtient $\mathcal{P}(x) = x(x + 12)$.
 - $\mathcal{P}'(x) = 2x + 12$.

- Exercice 7.3:**
- Appeler x la largeur du pâturage perpendiculaire à la route.
 - En tenant compte des prix, on obtient $\mathcal{P}(x) = 300\left(x + x + \frac{1}{x}\right) + 500 \cdot \frac{1}{x}$.
 - On obtient $\mathcal{P}'(x) = \frac{200(\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{3}x - 2)}{x^2}$.

- Exercice 7.4:**
- Poser $A(x; 0)$ et $B(x; y)$.
 - La hauteur y du triangle en fonction de x : $y = \sqrt{9 - x}$.
 - On obtient l'aire : $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{9 - x}$ puis $\mathcal{A}'(x) = \frac{3(6 - x)}{4\sqrt{9 - x}}$.

- Exercice 7.5:**
- Appeler x la 1/2 base du rectangle.
 - La hauteur y du rectangle s'obtient en déterminant l'équation de la parabole : $y = -\frac{4}{9}(x^2 - 9)$.
 - On obtient l'aire : $\mathcal{A}(x) = -\frac{8}{9}x^3 + 8x$ puis $\mathcal{A}'(x) = -\frac{8}{3}x^2 + 8$.

- Exercice 7.6:** • Appeler x la 1^{re} coordonnée de P . (supposez-la positive)
 • La hauteur du rectangle y s'obtient à l'aide de l'équation de AC :

$$y = -2x + 6.$$

- $\mathcal{A}(x) = -4x^2 + 12x$.
- Il s'agit d'une fct du 2^e degré "∩", son max s'obtient rapidement à l'aide de $x = -\frac{b}{2a}$.

- Exercice 7.7:** • Appeler x la 1^{re} coordonnée du point P cherché.
 • La distance s'obtient à l'aide de la norme $\|\overrightarrow{OP}\|$ ou th. de Pythagore :

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 9)^2}.$$

- Puis $d'(x) = \frac{x(2x + \sqrt{34})(2x - \sqrt{34})}{2\sqrt{x^4 - 17x^2 + 81}}$.

- Exercice 7.8:** • Appeler x le rayon du cylindre, la hauteur du cylindre s'obtient à l'aide de la formule du volume du cylindre.
 • La quantité de matière est associée à l'aire totale du cylindre :

$$\mathcal{A} = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

- On obtient $\mathcal{A}(x) = \frac{2\pi x^3 + 3,5}{x}$ puis $\mathcal{A}'(x) = \frac{4\pi x^3 - 3,5}{x^2}$.

- Exercice 7.9:** • En exprimant les dimensions du parallélogramme en fonction de x , on obtient $MN = \frac{6}{5}x$ et la hauteur du parallélogramme $= \frac{4}{5}(5 - x)$.
 • On obtient $\mathcal{A}(x) = -\frac{24}{25}x^2 + \frac{24}{5}x$. Son max s'obtient à l'aide de $x = -\frac{b}{2a}$.

- Exercice 7.10:** a) Poser un système d'équations et le résoudre.
 b) • x étant la 1^{re} coordonnée de P , on obtient : $\mathcal{A}(x) = (x^2 + 1)(2 - x)$.
 • Puis $\mathcal{A}'(x) = -3x^2 + 4x - 1$.
 • Ne pas oublier de contrôler ce qui se passe au bord de E_D .

- Exercice 7.11:** • Appeler x la hauteur de la zone imprimée.
 • On obtient $\mathcal{A}(x) = (x + 10) \left(\frac{600}{x} + 6 \right)$.
 • Puis $\mathcal{A}'(x) = 6 - \frac{6000}{x^2}$.

- Exercice 7.12:** • Appeler x le nbre de poiriers **ajoutés**.
 • Rendement : $\mathcal{R}(x) = (60 + x)(480 - 5x)$.
 • Il s'agit d'une fct du 2^e degré "∩", son max s'obtient rapidement à l'aide de $x = -\frac{b}{2a}$.

- Exercice 7.13:**
- Appeler x le rayon du cercle de base, h la hauteur du cône.
 - On exprime le volume en fonction de h par : $\mathcal{V}(h) = \frac{1}{3}\pi(100 - h^2) \cdot h$.
 - Puis $\mathcal{V}'(h) = \frac{\pi}{3}(100 - 3h^2)$.

- Exercice 7.14:**
- Appeler x la base du rectangle, on obtient $\mathcal{V}(x) = \frac{\pi}{4}(30x^2 - x^3)$.
 - Appeler x la base du rectangle, on obtient $\mathcal{A}(x) = \pi(30x - x^2)$.
 - Appeler x la base du rectangle, on obtient $\mathcal{A}(x) = \pi(30x - \frac{1}{2}x^2)$.

- Exercice 7.15:**
- Appeler x la longueur de la face avant du tiroir, sa hauteur $h = \frac{250}{x}$.
 - En tenant compte des prix, on obtient $\mathcal{P}(x) = 30 + 1,6x + \frac{800}{x}$.
 - Puis $\mathcal{P}'(x) = \frac{1,6x^2 - 800}{x^2}$.

- Exercice 7.16:**
- Appeler x la hauteur la photo, $y - 2$ la largeur de celle-ci.
 - On obtient $\mathcal{A}(x) = 10x - x^2$.
 - La fct à optimiser est du 2^e degré "∩", son max s'obtient en $x = -\frac{b}{2a}$.

- Exercice 7.17:**
- Prix de revient = coût essence + salaire chauffeur.
- $$\mathcal{P}(v) = 15 \cdot \left(\frac{600}{v} + \frac{v}{3} \right) \cdot 2 + 26 \cdot \left(\frac{1500}{v} \right) = \frac{57'000}{v} + 10v.$$
- Puis $\mathcal{P}'(v) = \frac{10(v^2 - 5'700)}{v^2}$.

- Exercice 7.18:**
- $\mathcal{P}'(\alpha) = 0 \iff \frac{v_0^2}{g} (\sin(2\alpha))' = 0 \iff \frac{2v_0^2}{g} \cos(2\alpha) = 0$.

- Exercice 7.19:**
- $\mathcal{A}(\alpha) = 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \implies \mathcal{A}'(\alpha) = 2(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))$
 - $\mathcal{A}'(\alpha) = 0 \iff \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}$ ou $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}$ (selon la subst).

- Exercice 7.20:**
- base du Δ : $b = 2 \sin(\alpha)$
 - hauteur du Δ : $h = 1 + \cos(\alpha)$
- $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \implies \mathcal{A}(\alpha) = \sin(\alpha) \cdot (1 + \cos(\alpha))$
- $\mathcal{A}'(\alpha) = 0 \iff \cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ ou $\cos(\alpha) = -1$

Exercice 7.21: • temps pour AP : $t_{AP} = \frac{\text{dist.}}{\text{vit.}} = \frac{9}{4 \cos(\alpha)}$

• temps pour PB : $t_{PB} = \frac{\text{dist.}}{\text{vit.}} = \frac{15 - 9 \tan(\alpha)}{5}$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ temps pour } AP : t_{AP} = \frac{\text{dist.}}{\text{vit.}} = \frac{9}{4 \cos(\alpha)} \\ \bullet \text{ temps pour } PB : t_{PB} = \frac{\text{dist.}}{\text{vit.}} = \frac{15 - 9 \tan(\alpha)}{5} \end{array} \right\} \implies \dots$$

$$\implies t(\alpha) = \frac{9}{4 \cos(\alpha)} + \frac{15 - 9 \tan(\alpha)}{5}$$

$$\bullet t'(\alpha) = \frac{9}{4} ((\cos(\alpha))^{-1})' + \frac{1}{5} (15 - 9 \tan(\alpha))' = \frac{9(5 \sin(\alpha) - 4)}{20 \cos^2(\alpha)}$$

Exercice 7.22: • temps pour AB : $t_{AB} = \frac{\text{dist.}}{\text{vit.}} = \frac{4 \cos(\alpha)}{2}$

• temps pour BC : $t_{BC} = \frac{\text{dist.}}{\text{vit.}} = \frac{4\alpha}{4}$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ temps pour } AB : t_{AB} = \frac{\text{dist.}}{\text{vit.}} = \frac{4 \cos(\alpha)}{2} \\ \bullet \text{ temps pour } BC : t_{BC} = \frac{\text{dist.}}{\text{vit.}} = \frac{4\alpha}{4} \end{array} \right\} \implies t(\alpha) = 2 \cos(\alpha) + \alpha$$

$$\bullet t'(\alpha) = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{6} \quad (\text{s'agit-il vraiment d'un min ??})$$

Exercice 7.23: Pour la partie a), substituez ci-dessous a par 10.

- Volume  = $2a^3 \cos(\alpha)$
- Volume  = $a^3 \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$
- $\mathcal{V}'(\alpha) = a^3 (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) - 2 \sin(\alpha))$
- $\mathcal{V}'(\alpha) = 0 \iff 2 \sin^2(\alpha) + 2 \sin(\alpha) - 1 = 0$ (à résoudre avec la formule)

Réponses finales du Chapitre 7

Exercice 7.1: Les carrés doivent avoir un côté d'env. 3,28 cm.

Exercice 7.2: Le produit minimum vaut -36.

Exercice 7.3: Les dimensions sont $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ km et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ km.

Exercice 7.4: $A(6 ; 0)$ pour une aire max de $3\sqrt{3} u^2$.

Exercice 7.5: Les dimensions sont $2\sqrt{3}$ et $8/3$.

Exercice 7.6: On obtient les points $P(3/2 ; 0)$ et $P(-3/2 ; 0)$, les abscisses sont donc $x = \pm 3/2$.

Exercice 7.7: Les points cherchés sont $P\left(-\frac{\sqrt{34}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ ou $P\left(\frac{\sqrt{34}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 7.8: Le rayon vaut env. 6,53 cm et la hauteur vaut env. 13,06 cm.

Exercice 7.9: a) L'aire est maximum pour $x = 5/2$.

b) Le parallélogramme est un losange pour $x = 25/11$.

(PS. Comparez les deux valeurs obtenues !!)

Exercice 7.10: a) $y = x^2 + 1$.

b) $P(1; 2)$ et l'aire max vaut $\mathcal{A} = 2u^2$.

$P(0; 1)$ et l'aire max vaut $\mathcal{A} = 2u^2$. (**au bord du domaine !!**)

Exercice 7.11: Les dimensions sont $6\sqrt{10} + 6$ cm et $10\sqrt{10} + 10$ cm.

Exercice 7.12: Il devra planter 18 nouveaux poiriers.

Exercice 7.13: La hauteur $h \approx 5,77$ cm.

Exercice 7.14: a) le plus grand volume pour $x = 20$ cm et $y = 10$ cm.

b) la plus grande aire latérale pour $x = 15$ cm et $y = 15$ cm.

c) la plus grande aire totale pour $x = 30$ cm et $y = 0$ cm.

En fait comme $x = 30$ cm, le rectangle se réduit à un segment.

Exercice 7.15: Les dimensions sont $10\sqrt{5}$ cm, $5\sqrt{5}$ cm et 40 cm.

Exercice 7.16: La planche devra être découpée en quatre morceaux :

deux de 5 cm et deux de 7 cm.

Exercice 7.17: b) La vitesse moyenne est d'environ 75,5 km/h.

Exercice 7.18: La portée est maximale pour un angle $\alpha = \pi/4$.

Exercice 7.19: Le rectangle est d'aire maximale pour un angle $\alpha = \pi/4$.

Exercice 7.20: Le triangle est d'aire maximale pour un angle $\alpha = \pi/3$.

Mais est-ce vraiment une surprise ?

Exercice 7.21: L'angle $\alpha = \sin^{-1}(4/5) \approx 0,93$ ou env. $53,13^\circ$.

Le point d'accostage est situé à env. 3 km de B

Exercice 7.22: L'angle $\alpha = \pi/6$ correspond à un **maximum** de la fonction $t(\alpha)$.

Le min doit donc se trouver au bord de E_D . Il s'agira de $\alpha = \pi/2$.

Exercice 7.23: a) Le volume est maximal pour $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \approx 0,37$

(ou env. $21,47^\circ$).

b) Réponse identique.

A.8 Les fonctions exponentielle et logarithme naturelles

Exercice 8.1:

a) $E_D = \mathbb{R}_+^*$	$S = \{e\}$
b) $E_D = \mathbb{R}$	$S = \{\ln(5) - 3\}$
c) $E_D =]4; +\infty[$	$S = \{e^4 + 4\}$
d) $E_D = \mathbb{R}$	$S = \emptyset$
e) $E_D = \mathbb{R}$	$S = \{10 \ln(7)\}$
f) $E_D = \mathbb{R}_+^*$	$S = \{1\}$
g) $E_D = \mathbb{R}^*$	$S = \{\pm 1\}$
h) $E_D =]8/5; +\infty[$	$S = \{8/3\}$
i) $E_D =]-\infty; 0[\cup]8/5; +\infty[$	$S = \{8/3\}$
j) $E_D = \mathbb{R}$	$S = \{\pm \sqrt{\ln(4)}\}$

E_D	Zéros	Tableau de signes							
a) $] -\infty ; 1/2[$	en $x = 1/4$	<table border="1"> <tr> <td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td></td></tr> </table>	$f(x)$	+	0	-			
$f(x)$	+	0	-						
b) $] 0 ; +\infty [- \{1\}$	aucun	<table border="1"> <tr> <td>$f(x)$</td><td></td><td>-</td><td></td><td>+</td></tr> </table>	$f(x)$		-		+		
$f(x)$		-		+					
c) $] -2 ; 1[$	en $x = -1/2$	<table border="1"> <tr> <td>$f(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr> </table>	$f(x)$		-	0	+		
$f(x)$		-	0	+					
d) $] 0 ; +\infty [- \{e^2\}$	en $x = e^{-3}$	<table border="1"> <tr> <td>$f(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td></td><td>+</td></tr> </table>	$f(x)$		+	0	-		+
$f(x)$		+	0	-		+			
e) \mathbb{R}	en $x = \pm 1$	<table border="1"> <tr> <td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr> </table>	$f(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	+	0	-	0	+				
f) $] -\infty ; -1] \cup [0 ; +\infty [$	aucun	<table border="1"> <tr> <td>$f(x)$</td><td>+</td><td></td><td>+</td></tr> </table>	$f(x)$	+		+			
$f(x)$	+		+						
g) \mathbb{R}^*	en $x = -3$	<table border="1"> <tr> <td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td><td>+</td></tr> </table>	$f(x)$	-	0	+		+	
$f(x)$	-	0	+		+				
h) $\mathbb{R} - \{-3\}$	aucun	<table border="1"> <tr> <td>$f(x)$</td><td>+</td><td></td><td>+</td></tr> </table>	$f(x)$	+		+			
$f(x)$	+		+						

Exercice 8.3: Si $f(x) = e^x$ alors $f'(x) = e^x$

D'ailleurs, à une constante près, c'est la seule fonction qui admet elle-même pour propre dérivée.

Exercice 8.4: Si $f(x) = \ln(x)$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$

Exercice 8.5:

E_D	Zéros	$f'(x)$
a) \mathbb{R}	aucun	$5e^{5x}$
b) \mathbb{R}	aucun	$2xe^{x^2}$
c) \mathbb{R}^*	aucun	$-\frac{1}{x^2}e^{1/x}$
d) $]-\infty; 5/4[$	en $x = 1$	$\frac{4}{4x-5}$
e) $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$	en $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$	$\frac{2x-1}{x(x-1)}$
f) \mathbb{R}^*	aucun	$(2x-1)e^{1/x}$
g) $]0; +\infty[$	en $x = e$	$\ln(x)$
h) $]0; e[\cup]e; +\infty[$	en $x = e^2$	$\frac{1}{x(\ln(x)-1)^2}$
i) \mathbb{R}	en $x = \ln(2)$ ou $x = 0$	$(2e^x - 3)e^x$

Exercice 8.6: a) $P(1; e) \quad y = e \cdot x$ b) $P(e; 1) \quad y = \frac{1}{e} \cdot x$

Exercice 8.7: a) $C(10) \cong 3,33; \ C(20) \cong 5,48; \ C(30) \cong 5,14; \ C(70) \cong 3,53$

b) $C'(t) = \frac{110(3 - \ln(t))}{t^2}$

La capacité max. de 5,48 litres est atteinte à l'âge de 20,09 ans

a)	$\lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{indéterminé}$
b)	$\lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{indéterminé}$
c)	$\lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{indéterminé}$
d)	$\lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{indéterminé}$
e)	$\lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{indéterminé}$
f)	$\lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = 0^-$	$\lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{indéterminé}$

$$\text{g)} \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = \text{indéterminé} \quad \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\text{h)} \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} f(x) \cdot g(x) = \text{indéterminé} \quad \lim_{x \rightarrow \text{nbre}} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Exercice 8.9: Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0^+$

Exercice 8.10: Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0_+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} = +\infty$

Exercice 8.11: a) indéterminé du type $\frac{"+\infty"}{+\infty}$.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x & 10 & 100 & 230 & \dots \\ \hline e^x / \ln(x) & \sim 9566 & \sim 5,8 \cdot 10^{42} & \sim 1,4 \cdot 10^{99} & \dots \\ \hline \end{array} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} = +\infty$$

b) indéterminé du type $"0_+ \cdot (-\infty)"$. Tableau de valeurs, on obtient 0^-

c) indéterminé du type $"(+\infty) \cdot 0_+"$. Tableau de valeurs, on obtient 0^+

d) indéterminé du type $"(+\infty) \cdot 0_+"$. Tableau de valeurs, on obtient 0^+

Exercice 8.12: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^{2x}} = \frac{"\ln(+\infty)"}{e^{+\infty}} = \frac{"+\infty"}{+\infty}$ ind. mais podium.

$$\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^{2x}} = 0^+$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(x^3) = "e^{-\infty} \cdot \ln(+\infty)" = "0^+ \cdot (+\infty)"$ ind mais podium

$$\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3)}{e^x} = \frac{"\ln(+\infty)"}{e^{+\infty}} = 0^+$$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} x = "e^{+\infty} \cdot (-\infty)" = "(+\infty) \cdot (-\infty)" = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(-x) = "e^{-\infty} \cdot \ln(+\infty)" = "0^+ \cdot (+\infty)"$ ind.

posons $t = -x$ (donc $x = -t$)

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} \ln(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{e^t} = \frac{"\ln(+\infty)"}{e^{+\infty}}$$

$$\stackrel{\text{podium}}{\implies} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(-x) = 0^+$$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{3x-5} = "(-\infty)^3 \cdot e^{-\infty}" = "(-\infty) \cdot 0^+" \text{ indéterminé}$

posons $t = -x$ (donc $x = -t$)

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t)^3 e^{-3t-5} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t^3}{e^{3t+5}} = \frac{"-\infty^3"}{e^{+\infty}}$$

$$\stackrel{\text{podium}}{\implies} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{3x-5} = 0^-$$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{x^2} = \frac{"e^{+\infty}"}{0^+} = +\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} x^2 = "e^{+\infty} \cdot 0^+" = "(+\infty) \cdot 0^+" \text{ indéterminé}$

posons $t = 1/x$ (donc $x = 1/t$)

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{"e^{+\infty}"}{(+\infty)^2} \stackrel{\text{podium}}{\implies} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} x^2 = +\infty$$

h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \frac{"e^{-\infty}"}{0^+} = \frac{"0^+"}{0^+} \text{ indéterminé}$

posons $t = 1/x$ (donc $x = 1/t$)

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{1/t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = \frac{"+\infty"}{e^{+\infty}} \stackrel{\text{podium}}{\implies} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = 0^+$$

Exercice 8.13: a) 0

b) $e^{1/2}$

c) 1

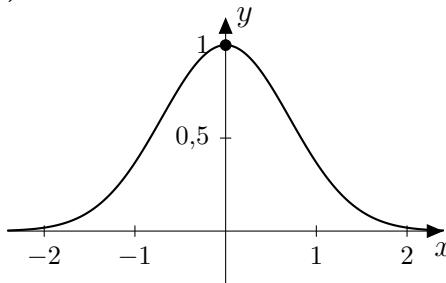
d) 0

e) $\ln(3)$

f) $-\infty$

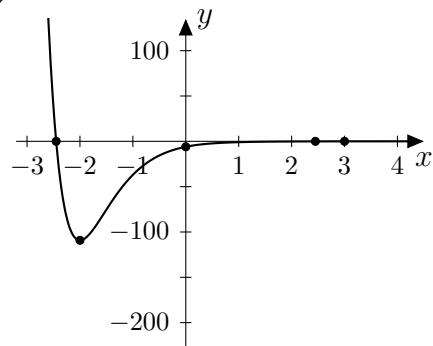
Exercice 8.14: Des éléments de réponses pourront être vus ensemble à votre demande.

Exercice 8.15: a)



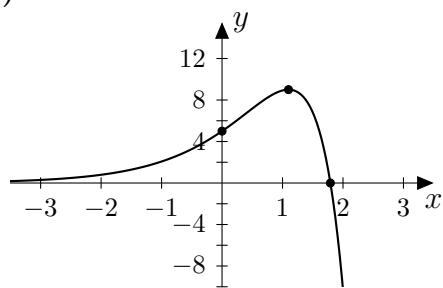
- $E_D = \mathbb{R}$
- pas de zéro
- AH en $y = 0$
- $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$
- Max $(0 ; 1)$
- Ord. origine en $y = 1$

b)



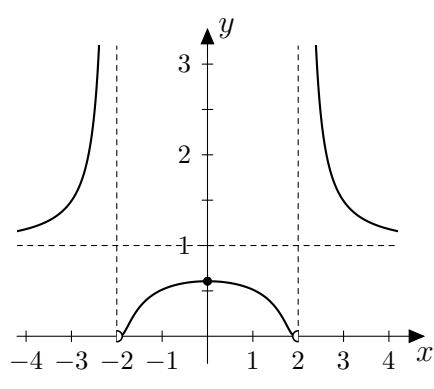
- $E_D = \mathbb{R}$
- zéros en $x = \pm\sqrt{6}$
- AHG en $y = 0$
- $f'(x) = -2(x-3)(x+2) \cdot e^{-2x}$
- Min $(-2; -2e^4)$
- Max $(3; 3e^{-6})$
- Ord. origine en $y = -6$

c)



- $E_D = \mathbb{R}$
- zéros en $x = \ln(6)$
- AHG en $y = 0$
- $f'(x) = -2e^x(e^x - 3)$
- Max $(\ln(3); 9)$
- Ord. origine en $y = 5$

d)



- $E_D = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$
- pas de zéro
- AV en $x = -2^-$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0^+$ (pt limite $(-2^+; 0^+)$)
- AV en $x = 2^+$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0^+$ (pt limite $(2^-; 0^+)$)
- AH en $y = 1$
- $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 4)^2} \cdot e^{2/(x^2-4)}$
- Max $(0; e^{-1/2})$ et Ord. origine

A.9 Primitives et intégrales

Exercice 9.1: a) $\mathcal{A} = 100$

b) $\mathcal{A} = 400$

c) $\mathcal{A} = 300$

Exercice 9.2: a) $\mathcal{A} = 12$

b) $\mathcal{A} = 48$

c) $\mathcal{A} = 60$

Exercice 9.3: a) $\mathcal{A} = 4$

b) $\mathcal{A} = 16$

c) $\mathcal{A} = 20$

Exercice 9.4: a) $A(x) = 4x + c$

b) $A(x) = 3x^2 + c$

c) $A(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$

d) $A(x) = e^x + c$

e) $A(x) = \sqrt{x} + c$

f) $A(x) = -\frac{1}{x} + c$

g) $A(x) = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + c$

h) $A(x) = \frac{15}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$

i) $A(x) = 2x^4 + c$

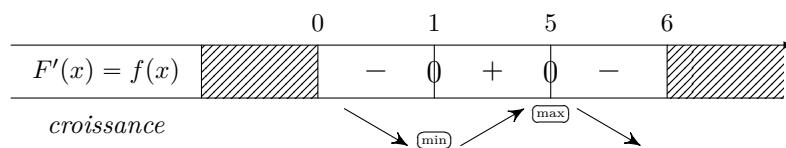
Exercice 9.5: Oui, F' est bien égale à G'

Exercice 9.6: a) $f(x) = 10x - 3$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 9.7: a) Tableau de croissance :



b) Les 2 graphiques n°1 et n°4 correspondent.

Exercice 9.8: a) $F(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + c$

b) $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + c$

c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + c$

d) $F(x) = \frac{1}{4}(x+3)^4 + c$

e) $F(x) = -\frac{1}{6}(1-2x)^3 + c$

f) $F(x) = \frac{1}{4}(3x^2 + x)^4 + c$

g) $F(x) = \frac{1}{40}(4x^2 + 3)^5 + c$

h) $F(x) = \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} + c$

i) $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + c$

j) $F(x) = 2\ln(|x|) + c$

k) $F(x) = \frac{1}{3}\ln(|3x+1|) + c$

l) $F(x) = e^{3x} + c$

m) $F(x) = e^{x^2+x} + c$

n) $F(x) = 2\ln(|x^2+x+1|) + c$

o) $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x^2) + c$

p) $F(x) = (\sin(x))^2 + c$

Exercice 9.9: a) $f(x) = x^3 - 4x - 51$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + 2$

Exercice 9.10: a) La fonction f n'est pas du type $f = \frac{g'}{g}$ mais presque !!

b) $a = 5/4$ et $b = -5/4$

c) $F(x) = \ln|x^2 - 2x - 3| + \frac{5}{4}\ln|x+1| - \frac{5}{4}\ln|x-3| + c$

d) Montrer, par exemple, que $f(x) = \frac{9/4}{x+1} + \frac{-1/4}{x-3}$

Exercice 9.11: Il suffit de vérifier que $F'(x) = f(x)$

Exercice 9.12: • Si $\Delta x = 1$ alors $140 \leq \text{Aire} \leq 204$

• Si $\Delta x = 1/2$ alors $155 \leq \text{Aire} \leq 187$

En fait, cette aire vaut en réalité $\int_0^8 x^2 dx = 170,6$

Exercice 9.13: a) $\frac{x^3}{3} \Big|_1^4 = 21$

b) $x^3 \Big|_0^3 = 27$

c) $\frac{x^3}{6} \Big|_1^5 = \frac{62}{3}$

d) $\frac{3x^4}{20} \Big|_0^1 = \frac{3}{20}$

e) $\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x \Big|_0^2 = -4$

f) $\frac{u^3}{3} + u \Big|_{-1}^2 = 6$

g) $\frac{v^4}{4} - \frac{3v^2}{2} \Big|_{-2}^2 = 0$

h) $\frac{x^3}{5} + 4x \Big|_{-3}^3 = \frac{174}{5}$

i) $-\cos(x) \Big|_0^\pi = 2$

j) $\frac{1}{2} \sin(2x) \Big|_{-\pi}^\pi = 0$

Exercice 9.14: a) $\frac{-(1-x)^4}{4} \Big|_0^2 = 0$

b) $\frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3} \Big|_0^3 = \frac{14}{3}$

c) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \Big|_1^3 = \frac{2}{9}$

d) $\frac{1}{2} \sin(x^2) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \sin(4\pi^2)$

e) $\frac{-(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

f) $\frac{-e^{-2u}}{2} \Big|_{-3}^2 = \frac{e^6}{2} - \frac{e^{-4}}{2}$

g) $\frac{\ln(5)}{3}$

h) $\frac{-3}{4(x^2+1)^2} \Big|_0^1 = \frac{9}{16}$

La donnée du g) "cache" une nouvelle propriété du calcul intégral. L'avez-vous repéré ?

Exercice 9.15: $\mathcal{A} = 65$

Exercice 9.16: a) $\mathcal{A} = \frac{256}{27}$ b) $\mathcal{A} = \frac{63}{20}$ c) $\mathcal{A} = \frac{253}{12}$

Exercice 9.17: a) $a = 4, b = 0, c = 0$.

b) Il s'agit de vérifier que : $F'(x) = (-4(x^2 + 2x + 2)e^{-x})' = f(x)$
c) $\mathcal{A} = 8 - 40e^{-2}$

Exercice 9.18: Elles sont les trois vraies. On peut les justifier par des esquisses de fonctions et leur surface sous la courbe.

Exercice 9.19: a) $h(d) = \frac{1}{1600}d^2 - \frac{1}{4}d + 125$
b) $h = \frac{1}{600} \int_0^{600} \left[\frac{1}{1600}d^2 - \frac{1}{4}d + 125 \right] dd = 125 \text{ m}$

Exercice 9.20: a) $\mathcal{A} = 9$ b) $\mathcal{A} = 1/2$ c) $\mathcal{A} = 9/4$

Exercice 9.21: $\mathcal{A} = 1/2$

Exercice 9.22: $\mathcal{A} = \ln(2)$

Exercice 9.23: $\mathcal{A} = 3/8$

Exercice 9.24: Parabole : $y = -2x^2 - 3x$ et $\mathcal{A} = 4/3$

Exercice 9.25: a) $a = 1$ et $b = -1$

b) $\int 1 - \frac{1}{x+1} dx = x - \ln(|x+1|) + c$

c) $\mathcal{A} = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{x+1} dx = \ln(|x+1|) \Big|_0^2 = \ln(3)$

d) $x_G = \frac{1}{\mathcal{A}} \int_0^2 \frac{x}{x+1} dx = \frac{1}{\ln(3)} \int_0^2 1 - \frac{1}{x+1} dx$
 $= \frac{1}{\ln(3)} \left[x - \ln(|x+1|) \right]_0^2 = \frac{2 - \ln(3)}{\ln(3)}$

e) $y_G = \frac{1}{2\mathcal{A}} \int_0^2 \left(\frac{1}{x+1} \right)^2 dx = \frac{1}{2\ln(3)} \int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx$
 $= \frac{1}{2\ln(3)} \int_0^2 (x+1)^{-2} dx = \frac{1}{2\ln(3)} \left[\frac{-1}{x+1} \right]_0^2 = \frac{1}{3\ln(3)}$

Ainsi : $G(0,82; 0,30)$

Exercice 9.26: $\mathcal{A} = 10/3$

Exercice 9.27: $\mathcal{A} = 5\sqrt{2} - 1 \cong 6,07$

Exercice 9.28: a) $k = 6$ b) $k = 7$ c) $k = 2$ d) $k = 4$

Exercice 9.29: $a = 2\sqrt{2}$

Exercice 9.30: $m = 3/2$

Exercice 9.31: $c = 13$

Exercice 9.32: $a = \sqrt[3]{3}$

A.10 Application des intégrales

Exercice 10.1: ① $\mathcal{V} = 55\pi$ ② $\mathcal{V} = 39\pi$

Exercice 10.2: ① $\mathcal{V} = 8\pi$ ② $\mathcal{V} = \frac{9}{2}\pi$ ③ $\mathcal{V} = \frac{10}{3}\pi$ ④ $\mathcal{V} \cong 20,55$

Exercice 10.3: a) Par Pythagore (ou norme d'un vecteur)

b) $f(x) = +\sqrt{r^2 - x^2}$ avec $E_D = [-r; r]$

c) $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Exercice 10.4: ① $\mathcal{V} = 64\pi$ ② $\mathcal{V} = 16\pi$

Exercice 10.5: ① $\mathcal{V} = 162\pi$ ② $\mathcal{V} = \frac{2}{15}\pi$ ③ $\mathcal{V} = \frac{5}{2}\pi$ ④ $\mathcal{V} = \frac{9}{2}\pi$

Si vous souhaitez commander ou utiliser ce polycopié dans vos classes, merci de prendre contact avec son auteur en passant par son site web :

www.javmath.ch