

Combinatoire & Probabilités

3M_{Stand/Renf}

Jean-Philippe Javet



“Les Joueurs de cartes” Paul Cézanne

Table des matières

1	ANALYSE COMBINATOIRE	1
1.1	Le principe de multiplication	1
1.2	Les permutations	4
1.3	Les arrangements	8
1.4	Les combinaisons	12
1.5	Perm. - Arrang. - Combi. lequel choisir ?	15
2	PROBABILITÉS	21
2.1	Premières notions	21
2.2	Approche intuitive de la notion de probabilité	27
2.3	Probabilités en utilisant un diagramme de Venn	31
2.4	Probabilités en utilisant un diagramme en arbre	35
2.5	Épreuves de Bernoulli (ou loi binomiale)	38
2.6	Et si l'inconnue est la taille de l'arbre	41
2.7	Probabilité conditionnelle et événements indépendants	42
2.8	Un petit mélange	48
A	Bibliographie	51
A	Quelques éléments de solutions	I

Malgré le soin apporté lors de sa conception, le polycopié que vous avez entre les mains contient certainement quelques erreurs et coquilles. Merci de participer à son amélioration en m'envoyant un mail :

javmath.ch@gmail.com

Merci;-)

ANALYSE COMBINATOIRE



L'analyse combinatoire est l'étude des différentes manières de ranger des objets et permet de répondre à des questions telles que :

- “Combien de codes différents peut-on proposer sur le cadenas représenté ci-contre ?”
- “Dans une classe de 24 élèves, on doit élire deux délégués de classe. Combien existe-t-il de paires différentes possibles ?”

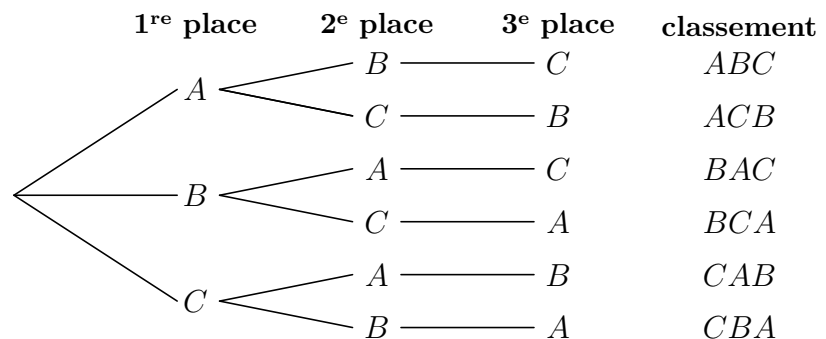
La connaissance de ces méthodes de dénombrement est indispensable au calcul élémentaire des probabilités.

1.1 Le principe de multiplication

Exemple 1: Supposons que trois équipes participent à un tournoi dans lequel sont déterminées une première, une deuxième et une troisième place. Pour faciliter l'identification des équipes, nous allons les désigner par les lettres A , B , C .

Cherchons le nombre de manières différentes permettant d'attribuer le classement de ces 3 équipes.

On peut illustrer ce raisonnement par un diagramme en arbre.



On remarque que le nombre de possibilités de classement (6) est le produit du nombre de possibilités (3) d'attribuer la première place, par le nombre de possibilités (2) d'attribuer la deuxième place (après que la première place a été attribuée), par le nombre de possibilités (1) d'attribuer la troisième place (les deux premières étant déjà fixées).

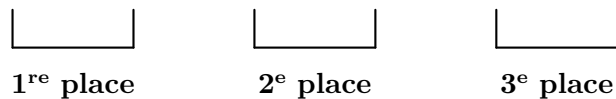
Le raisonnement ci-dessus illustre la règle générale suivante, que nous utiliserons comme axiome fondamental :

Le principe de multiplication :

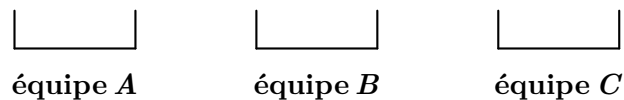
Si une première opération peut être effectuée de n_1 manières différentes, puis une seconde opération peut être effectuée de n_2 manières différentes, puis une troisième opération peut être effectuée de n_3 manières différentes et ainsi de suite jusqu'à une k -ième opération qui peut être effectuée de n_k manières différentes. Alors l'ensemble de toutes ces opérations peut être effectué de :

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k \text{ manières différentes.}$$

- Remarque:**
- L'analyse combinatoire n'est pas l'énumération de toutes les possibilités (souvent long et fastidieux) mais bien le dénombrement de celle-ci par un calcul.
 - Le plus souvent les arbres sont gigantesques, donc difficilement réalisables. On leur préférera souvent le modèle "gobelets" qui permet de compter le nombre de possibilités de les remplir.
 - Soit par rapport au classement :



- Soit par rapport à l'équipe :



Dans cet exemple, on constate que l'on peut dénombrer soit par rapport au classement, soit par rapport à l'équipe. Ce ne sera pas toujours le cas. Il s'agira alors de choisir le bon titre des gobelets.

Exemple 2: Une classe se compose de 12 filles et 9 garçons.

De combien de façons peuvent être choisis un président de classe, un vice-président, un trésorier et un secrétaire, si le trésorier doit être une fille, le secrétaire un garçon, et si un étudiant ne peut exercer plus d'une charge.



De façon générale, il est recommandé de dénombrer les opérations en commençant par celles où sont imposées les restrictions les plus sévères, et ceci, par ordre décroissant de sévérité.

Exemple 3: Combien peut-on former de nombres entiers de quatre chiffres différents, si ces nombres doivent être des multiples de 5 ?



Après avoir complété les gobelets à forte restriction, on peut être amené à séparer le dénombrement en 2 ou plusieurs cas.

Les méthodes de dénombrement se classeront selon 3 catégories :

- les permutations
- les arrangements
- les combinaisons

Exercice 1.1: Une fille a quatre jupes et six chemisiers. Combien de combinaisons différentes «jupe et chemisier» peut-elle porter ?

Exercice 1.2: Déterminer le nombre d'entiers positifs inférieurs à 10'000 qui peuvent être formés avec les chiffres 1, 2, 3 et 4

- a) si les répétitions sont permises ?
- b) si elles ne sont pas permises ?

Exercice 1.3: Combien de nombres différents de 5 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres de 0 à 9

- a) si les nombres doivent être impairs ?
- b) si les deux premiers chiffres de chaque nombre doivent être pairs ?

Exercice 1.4: Le Sport-Toto était un jeu de pronostics sur 13 matches de football. Il y a 3 résultats possibles : gagné, perdu ou nul (1 ; 2 ; x). Combien de pronostics différents peut-on faire ?

Exercice 1.5: On veut asseoir 5 hommes et 4 femmes dans une rangée de 9 chaises de manière à ce que les femmes occupent les places paires. Combien y a-t-il de possibilités ?

- Exercice 1.6:** Dans certains pays, les plaques d'immatriculation des automobiles commencent par une lettre de l'alphabet, suivie de cinq chiffres. Calculer combien de plaques d'immatriculation sont réalisables si :
- a) le premier chiffre suivant la lettre ne peut pas être 0 ;
 - b) la première lettre ne peut pas être O ou I et le premier chiffre ne peut pas être 0 ou 1.

1.2 Les permutations

Introduction: a) Combien d'anagrammes du mot ART peut-on former ?

b) Même question avec le mot ARA.

Définition: On appelle **permutation** une disposition *ordonnée* de *tous* les objets.

Remarques:

- Selon le modèle gobelet, il y a autant de gobelets que d'objets à y introduire.
- L'ordre de disposition dans ces gobelets est important.
- La famille d'objets à placer dans les gobelets peut contenir plusieurs copies identiques d'un ou plusieurs objets. Dans ce cas, rien ne distingue les permutations de ces objets entre eux et on parle alors de permutation de n objets avec répétitions.

Notation:

- P_n : nombre de permutations de n objets distincts.
- $\overline{P}_n(r_1; \dots; r_k)$: nombre de permutations de n objets avec répétitions où r_1, \dots, r_k désignent le nombre d'objets identiques.

- Exemples:** a) Le nbre de permutations des lettres du mot GYMNASSE est P_7 .
 b) Le nbre de permutations des lettres du mot PROFESSIONS est :

$$\overline{P}_{11}(3; 2) \text{ ou } \overline{P}_{11}(2; 3)$$

Formule:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Justification :

Définition: On appelle “ **n factorielle**” ($n \in \mathbb{N}^*$) et l’on note $n!$ le produit défini par :

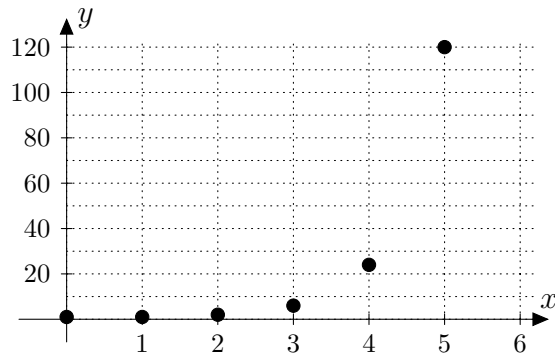
$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

De plus, on posera par convention $0! = 1$

-
- Exemples:**
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
 - $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
 - $10! = 3'628'800$

Remarques:

- La fonction factorielle admet une croissance spectaculaire :



- Vous trouverez sur votre calculatrice la touche $\boxed{x!}$ ou $\boxed{n!}$.

Formule:

$$P_n = n!$$

Formule:

$$\bar{P}_n(r_1; \dots; r_k) = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$$

Justification :

Exemple 4: Déterminer le nombre d'anagrammes du mot DIPLÔMES et du mot MATURITÉ.

Exemple 5: Un étudiant possède, parmi ses livres, 5 livres de math, 3 livres de géographie et 8 livres d'histoire de l'art.
De combien de manières peuvent-ils être rangés sur une étagère si les livres traitant de la même matière sont placés les uns à côté des autres.



Il faut décomposer chronologiquement les différentes étapes de rangement, les dénombrer afin de multiplier ensuite les réponses individuelles obtenues.

Exercice 1.7: Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MORGES.

Exercice 1.8: Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MISSISSIPPI.
Parmi ces anagrammes, combien commencent et se terminent par la lettre S ?

Exercice 1.9: Combien de mots peut-on écrire avec les lettres du mot TOULOUSE, si les consonnes doivent occuper les 1^{re}, 2^e et 7^e positions ?

Exercice 1.10: Avec les lettres A, M, O, S et U, on peut créer 120 anagrammes. En les classant par ordre alphabétique, quelle sera la position du “mot” SOUMA ?

Exercice 1.11: Les quatre remplaçants d’une équipe de volley prennent place sur le banc des remplaçants. De combien de manières différentes peuvent-ils s’asseoir ?

Exercice 1.12: Neuf personnes prennent place autour d’une table ronde.

- a) De combien de manières différentes peuvent-elles s’asseoir ? (on ne tient compte que de la position relative des neuf personnes les unes par rapport aux autres)
- b) Même question, mais un couple de deux amoureux désirent être voisins.

Exercice 1.13: Un représentant s’apprête à visiter cinq de ses clients. De combien de façons peut-il faire cette série de visite :

- a) s’il les fait toutes le même jour ?
- b) s’il en fait trois un jour et deux le lendemain ?

Exercice 1.14: De combien de manières peut-on partager un groupe de dix personnes en deux groupes ; un groupe de 7 et un de 3 ?

Exercice 1.15: Le client d’une banque se rappelle que 2, 4, 7 et 9 sont les chiffres d’un code d’accès à quatre chiffres pour le distributeur automatique de billets. Malheureusement, il a oublié le code. Calculer le plus grand nombre possible d’essais nécessaires pour obtenir le code secret.

Exercice 1.16: Refaire l’exercice précédent avec les chiffres 2, 4 et 7, en sachant que l’un de ces chiffres se trouve deux fois dans le code d’accès à quatre chiffres.

Exercice 1.17: On dispose des sept jetons suivants : ① ① ② ② ② ③ ③

- a) Combien de nombres de sept chiffres peut-on composer en juxtaposant ces sept jetons ?
- b) Combien de nombres sont inférieurs à 1’300’000 ?

Exercice 1.18: On range 6 jetons de couleurs différentes regroupées deux à deux dans trois boîtes. Combien de dispositions différentes existe-t-il ?

1.3 Les arrangements

Introduction: a) Combien de nombres de deux chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 5, 6, 7, 8, 9 ?

b) Combien de nombres de cinq chiffres peut-on former avec les chiffres 1 et 2 ?

Remarques:

- L'ordre d'écriture est important :
 - ☞ dans le 1^{er} exemple, les nombres 56 et 65 sont différents ;
 - ☞ dans le 2^e, les nombres 11112 et 11121 sont différents.
- Contrairement aux permutations, on observe que :
 - ☞ dans le 1^{er} exemple, il y a plus d'éléments à placer que de "gobelets" à disposition.

Définition: On dispose de n objets :

- On appelle **arrangement sans répétition** une disposition *ordonnée* de p éléments distincts choisis parmi les n . ($1 \leq p \leq n$)

On note A_p^n le nombre d'arrangements possibles.

- On appelle **arrangement avec répétition** une disposition *ordonnée* de p éléments non forcément distincts choisis parmi les n .

On note \overline{A}_p^n le nombre d'arrangements possibles.

Formule:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} \quad 1 \leq p \leq n$$

Justification :

Remarque: Cette formule est compatible avec celle des **permutations** dans le cas d'un **arrangement de n éléments choisis parmi les n** :

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$$

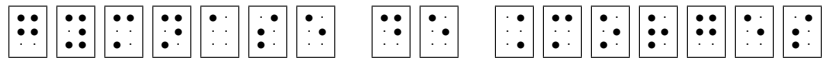
Formule:

$$\overline{A}_p^n = n^p \quad 1 \leq p$$

Justification :

Exemple 6: Déterminer le nombre de mots de quatre lettres distinctes formés avec les lettres du mot DIPLÔME ?

Exemple 7: Dans l'alphabet braille, chaque lettre ou signe est représenté par 6 points disposés en un tableau de 3 lignes et 2 colonnes, certains étant en relief.
Combien de signes distincts peut-on composer ?

 = gymnase de Morges

Exercice 1.19: De combien de manières 10 personnes peuvent-elles s'asseoir sur un banc de 4 places ?

Exercice 1.20: Avec les 26 lettres de l'alphabet,

- a) combien de mots de 5 lettres peut-on former ? (les mots n'ont pas nécessairement de signification !)
- b) Même question, mais en se limitant aux mots formés de 5 lettres différentes.

Exercice 1.21: Un immeuble est composé d'un rez-de-chaussée et de 8 étages. Un ascenseur part du rez-de-chaussée avec 5 occupants.

- a) De combien de manières différentes ces 5 occupants peuvent-ils choisir les étages auxquels ils vont se rendre ?
- b) Même question dans le cas où à chaque étage un occupant au plus quitte l'ascenseur.

Exercice 1.22:

- a) Huit personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de cinq places. Combien y a-t-il de possibilités ?
- b) Cinq personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de huit places. Combien y a-t-il de possibilités ?
- c) Comment expliquez-vous l'analogie entre ces deux situations ?

Exercice 1.23:

- a) Combien y a-t-il d'initiales possibles formées de deux lettres ?
- b) Combien un village doit-il avoir d'habitants pour que l'on soit sûr que deux personnes au moins ont les mêmes initiales ?


Exercice 1.24: On considère les nombres 2, 5 et 7.

- a) Combien peut-on former de nombres de deux chiffres distincts ?
- b) Parmi eux, combien y a-t-il de nombres pairs ?

Exercice 1.25: On considère un jeu forain où 4 souris, numérotées de 1 à 4 peuvent se diriger vers 5 cases A, B, C, D et E . Plusieurs souris pouvant choisir la même case. Sur un billet, le joueur inscrit une répartition des souris et il gagne si son pronostic se réalise. Combien de pronostics différents peut-il faire ?

Exercice 1.26: Dix chevaux sont au départ d'un grand prix à l'hippodrome de Vincennes. Combien y a-t-il de quartés possibles ?

Exercice 1.27: Un palindrome numérique est un entier, tel 45654, que l'on peut lire aussi bien depuis la gauche que depuis la droite. Combien de palindromes à cinq chiffres existe-t-il ?

 www.javmath.ch 

Exercice 1.28: Quand une carte routière a décidé de se liguer contre vous...



1^{re} partie :

Sur le site : <http://www.canalacademie.com> on pouvait lire :

Tenez, pourquoi une carte routière une fois ouverte est pratiquement impossible à replier correctement ?

La réponse est "statistique". Partons d'un exemple : Prenons une brochure qui contient quatre plis. Pour un simple document comme celui-ci, il existe 384 façons de le plier :

$$(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 2^4 = 384$$

Rien qu'une feuille à 2 plis vous fait 8 possibilités différentes de la plier. Alors imaginez pour une carte routière comportant 8 plis dans une direction et 4 dans un autre sens... le nombre total de possibilités de pliage est le produit de ses deux directions ! soit, 30'965'760 possibilités !

a) Pouvez-vous expliquer, ou mettre en doute, ces différentes valeurs ?

2^e partie :

Restons avec cette carte routière qui décidément a décidé de vous mener la vie dure. Pourquoi votre destination se trouve-t-elle toujours sur le bord de la carte ?

En général, à moins de 2 cm du bord, cela vous oblige à tourner la page pour vérifier votre itinéraire... Un pan typique de carte routière mesure 14×20 cm, soit 280 cm^2 . Si vous prenez vos 2 cm de marge sur cet exemple, cette surface représente 120 cm^2 soit près de la moitié de la surface totale. De ce fait, il y a de fortes chances pour que votre destination soit au bord de la carte !

b) Justifier à nouveau ces différentes valeurs ?

1.4 Les combinaisons

Introduction: Un club de tennis de table désire tirer au sort une équipe de deux parmi ses 4 meilleurs joueurs, numérotés respectivement $\{1; 2; 3; 4\}$, pour aller jouer en finale. Combien d'équipes peuvent être choisies ?

Remarques:

- Une combinaison est caractérisée **uniquement** par le choix des objets.
- Une combinaison n'est pas caractérisée par l'ordre des objets. L'équipe $\{1; 2\}$ ne diffère pas de l'équipe $\{2; 1\}$.
- On **ne peut pas utiliser** le modèle gobelet, car celui-ci induit un choix ordonné; ce qui n'est pas le cas lors de combinaisons.

Définition: On dispose de n objets :

- On appelle **combinaison** une disposition *non ordonnée* de p éléments distincts choisis parmi les n . $(1 \leq p \leq n)$

On note C_p^n le nombre de combinaisons possibles.

Formule:

$$C_p^n = \frac{A_p^n}{P_p} \quad 1 \leq p \leq n$$

Justification :

Formule:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} \quad 1 \leq p \leq n$$

- Remarques:**
- Par convention de calcul, on pose $C_0^n = 1$ et $C_0^0 = 1$.
 - La notion de combinaison avec répétitions existe, mais nous ne l'étudierons pas dans le cadre de ce cours.

Exemple 8: De combien de manières différentes peut-on former un comité de trois personnes à partir d'une classe de 24 élèves ?

Exemple 9: Combien de mains différentes de six cartes peut-on obtenir à partir d'un jeu de 36 cartes ?
Parmi celles-ci :

- Combien contiennent les 4 valets ?
- Combien contiennent au moins 1 valet ?



Dans le cas de « au moins un », on dénombre la situation « aucun » que l'on déduit du dénombrement « total ».

Exercice 1.29: 12 personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien y a-t-il de poignées de main ?

Exercice 1.30: Vous devez organiser un tournoi de tennis dans le cadre de votre club. Il y a 9 personnes inscrites qui devront toutes jouer une fois contre leur adversaire. Combien de matchs vont devoir se dérouler ?

Exercice 1.31: Un marchand de glace a en stock 31 parfums différents. Il se vante de proposer environ 4500 glaces différentes à trois boules, chaque boule étant d'un parfum différent. Comment ce nombre a-t-il été obtenu ?

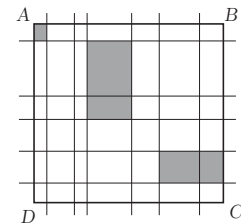
Exercice 1.32: Avec 10 députés et 6 sénateurs, on veut former une commission de 7 membres comprenant 5 députés. Quel est le nombre de possibilités ?

Exercice 1.33: De combien de manières peut-on partager un groupe de dix personnes en deux groupes ; un groupe de 7 et un de 3 ?

Exercice 1.34: De combien de façons peut-on choisir une main de 5 cartes dans un jeu de 36 cartes, si l'on veut que ces 5 cartes contiennent :

- | | |
|---------------------|-------------------------|
| a) les 4 as ? | b) 2 as et 2 rois ? |
| c) au moins un as ? | d) au moins deux rois ? |

Exercice 1.35: $ABCD$ est un rectangle. On trace six parallèles à AD et cinq parallèles à AB . Combien y a-t-il de rectangles au total sur cette configuration ?



Exercice 1.36: Un atelier comprend 15 ouvriers, 8 femmes et 7 hommes. On choisit dans cet atelier des groupes de 5 ouvriers :

- combien de groupes différents peut-on former ?
- combien de groupes comportant 3 hommes peut-on former ?

Exercice 1.37: De combien de façons peut-on remplir une feuille de loterie à numéros (choisir 6 numéros parmi 45) ?

Parmi toutes les possibilités, combien permettent de réaliser :

- 3 bons numéros (gain de 6.-) ?
- 6 bons numéros (le gros lot !!) ?

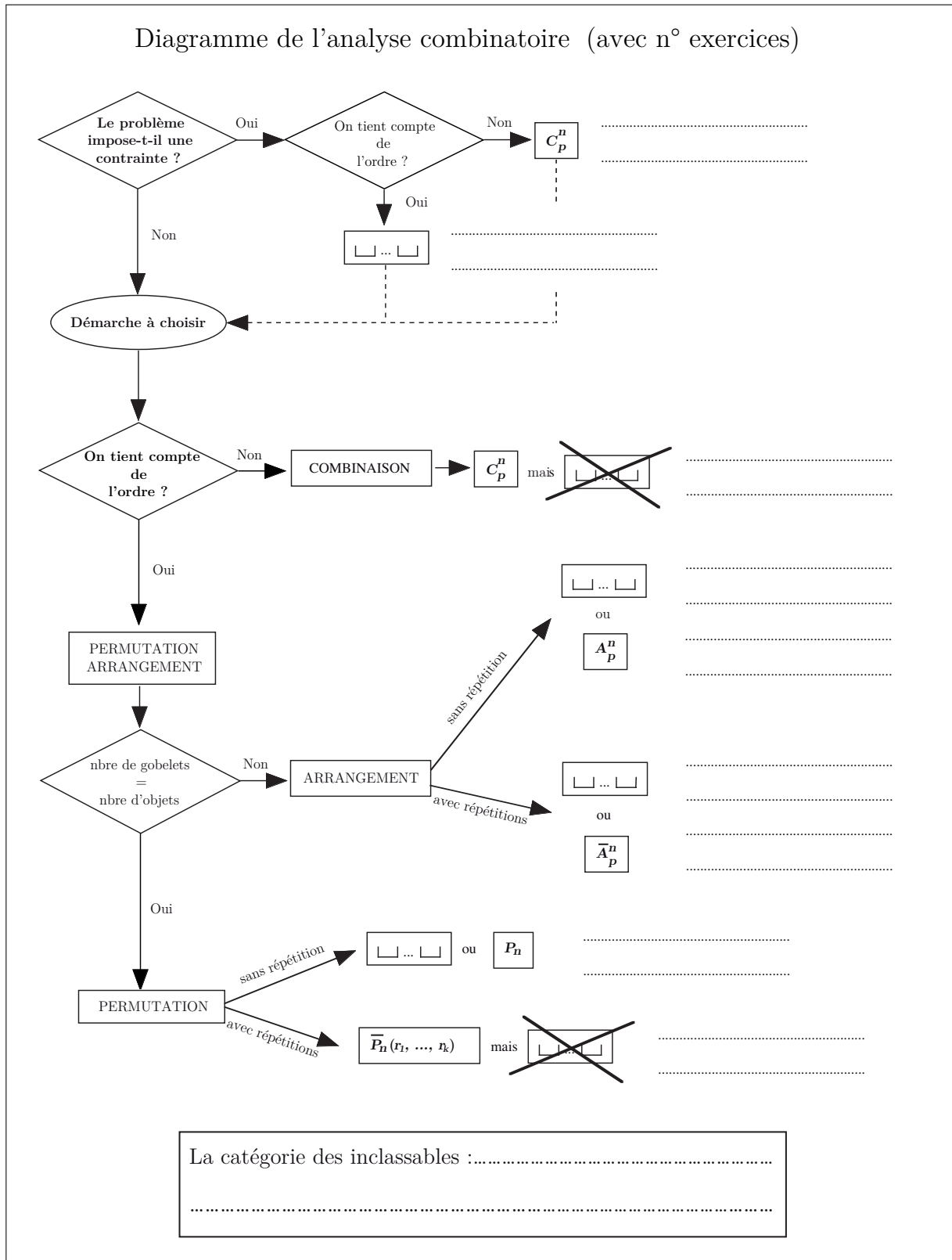
1.5 Perm. - Arrang. - Combi. lequel choisir ?

Exemple 10: Une urne contient les 6 jetons suivants $\{\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{5} \textcircled{6}\}$

- a) On tire simultanément 5 jetons. Combien de tirages différents contenant 2 chiffres pairs et 3 impairs peut-on former ?
- b) On tire successivement les 6 jetons et on les aligne. Combien de nombres différents formés des 6 chiffres peut-on ainsi former ?
- c) On tire successivement 4 jetons et on les aligne. Combien de nombres différents peut-on former ?
- d) On tire simultanément 4 jetons. Combien de tirages différents peut-on former ?
- e) On tire successivement 4 jetons, on note le chiffre obtenu puis on le remet dans l'urne. Combien de nombres différents peut-on former ?
- f) On tire simultanément 5 jetons, on les aligne de manière à ce que 2 chiffres pairs soient toujours séparés par un chiffre impair et réciproquement, 2 chiffres impairs par un chiffre pair. Combien de nombres différents peut-on former ?
- g) On rajoute 1 jeton $\textcircled{2}$ et 3 jetons $\textcircled{5}$ aux 6 jetons d'origine. Combien de nombres différents peut-on former en utilisant tous ces jetons ?

?? Mais... comment savoir dès le départ la bonne formule à utiliser ??

On peut utiliser le diagramme suivant :





Il est important de bien décoder le problème pour repérer si l'ordre a de l'importance dans le dénombrement. En particulier, si les mots suivants apparaissent :

SUCCESSIVEMENT \Rightarrow

SIMULTANÉMENT \Rightarrow

ON LES ALIGNE \Rightarrow

Exercice 1.38:

Dans une course, 12 chevaux prennent le départ.

- a) De combien de manières peut se présenter le tableau d'arrivée des 3 premiers ? (tiercé dans l'ordre)
- b) Combien de trios de gagnant peut-on avoir ? (tiercé dans le désordre)

Exercice 1.39:

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire 3 simultanément.

- a) Déterminer le nombre de tirages différents.
- b) Même question si l'on tire successivement ces trois boules.
- c) Qu'en est-il, si après chaque tirage, on remet la boule dans l'urne ?

Exercice 1.40:

Avec les 6 chiffres 2, 3, 5, 6, 7 et 9 ?

- a) Combien de nombres de 3 chiffres, non forcément distincts, peut-on former ?

Parmi ceux-ci, combien sont :

- b) inférieurs à 400 ? c) pairs ? d) multiple de 5 ?

Exercice 1.41:

Un étudiant doit résoudre 8 problèmes sur 10 lors d'un examen écrit.

- a) Combien de choix peut-il faire ?

Même question en supposant :

- b) qu'il doit obligatoirement résoudre les 3 premiers problèmes ?
- c) que parmi les 5 premiers problèmes, il doit obligatoirement en résoudre exactement 4 ?
- d) que parmi les 5 premiers problèmes, il doit obligatoirement en résoudre au moins 4 ?

Exercice 1.42: Compléter le tableau ci-dessous.

Un triangle bien connu ?

Chaque case correspond au calcul d'un choix de p objets parmi n (en ne tenant pas compte de l'ordre) :

$\begin{smallmatrix} p \\ n \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4
0	$C_0^0 =$	-	-	-	-
1	$C_0^1 =$	$C_1^1 =$	-	-	-
2	$C_0^2 =$	$C_1^2 =$	$C_2^2 =$	-	-
3	$C_0^3 =$	$C_1^3 =$	$C_2^3 =$	$C_3^3 =$	-
4	$C_0^4 =$	$C_1^4 =$	$C_2^4 =$	$C_3^4 =$	$C_4^4 =$

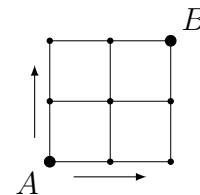
- En déduire le développement de $(x + y)^4 =$
- En déduire le 11^e terme de $(x + y)^{14}$

Exercice 1.43: Une justification de la construction du triangle de Pascal provient de la formule :

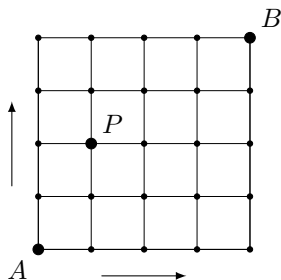
$$C_{p+1}^{m+1} = C_p^m + C_{p+1}^m$$

Démontrer cette formule.

Exercice 1.44: Sur ce quadrillage 2×2 , on ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins permettant de relier le point A au point B ?



Exercice 1.45: Sur ce quadrillage 4×4 , on ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut.



- Combien y a-t-il de chemins permettant de relier le point A au point B ?
- Parmi ces chemins, combien passent par le point $P(1; 2)$?
- En choisissant un chemin au hasard parmi tous les chemins reliant A à B , quel est le pourcentage de chance que ce chemin passe par P ?

- Exercice 1.46:** De combien de façons le photographe d'un mariage peut-il organiser une seule rangée de 6 personnes choisies parmi un groupe de 10 personnes, en considérant que les mariés font partie de ce groupe de 10 personnes et que :
- a) La mariée doit être sur la photographie, mais pas le marié ?
 - b) La mariée et le marié doivent tous les deux être sur la photographie ?
 - c) La mariée et le marié doivent être côte à côte sur la photographie ?

- Exercice 1.47:** On tire 3 cartes d'un jeu de 36 cartes.
- a) Combien y a-t-il de mains possibles ?
 - b) Combien y a-t-il de mains formées d'un roi et deux as ?
 - c) Combien y a-t-il de mains ne contenant aucun as ?
 - d) Combien y a-t-il de mains contenant au moins un as ?
 - e) Combien y a-t-il de mains contenant exactement un as ?

- Exercice 1.48:** Combien peut-on former de nombres de 8 chiffres avec deux 4, quatre 2 et deux 3 ?

- Exercice 1.49:** Combien de salades différentes peut-on préparer à partir d'un choix de laitue, scarole, endive, cresson et chicorée amère ? (Considérez d'abord le nombre possible constitué d'un légume, puis de deux ...)

- Exercice 1.50:** Dans combien de nombres compris entre 1000 et 9999
- a) Rencontre-t-on une fois le chiffre 3 ?
 - b) Ne rencontre-t-on pas le chiffre 3 ?
 - c) Rencontre-t-on trois fois le chiffre 7 ?

- Exercice 1.51:** De combien de manières peut-on asseoir 3 hommes et 3 femmes autour d'une table ronde si :
- a) Aucune restriction n'est imposée ?
 - b) 2 femmes particulières ne doivent pas être assises l'une à côté de l'autre ?
 - c) Chaque femme doit être placée entre deux hommes ?

Exercice 1.52: On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. À l'aide des 6 chiffres de cet ensemble, chacun étant pris une seule fois, combien peut-on former de nombres distincts dans chacun des cas suivants :

- a) Nombres de 6 chiffres ?
- b) Nombres de 4 chiffres ?
- c) Nombres de 4 chiffres commençant par le chiffre 3 ?
- d) Nombres de 4 chiffres contenant le chiffre 3 ?
- e) Nombres de 4 chiffres contenant les chiffres 3 et 6 ?

Exercice 1.53: L'autocar de M. Hitchcock peut transporter 16 personnes en plus du chauffeur. Les sièges sont disposés en 4 rangées de quatre avec un couloir passant au milieu. Huit filles et huit garçons montent dans l'autocar. De combien de façons différentes M. Hitchcock peut-il disposer les enfants sachant que :

- a) Il n'y a pas de contrainte ?
- b) Les filles sont toutes d'un côté du couloir et les garçons de l'autre ?
- c) Sur chaque rangée, il y a une paire (garçon, fille) de chaque côté du couloir ?

Exercice 1.54: M. et Mme Chombier ont du mal à trouver le sommeil, car leurs voisins du dessus donnent une petite fête. Tout à coup, un bouchon saute, et les joyeux fêtards trinquent tous ensemble. M. Chombier dénombre 28 tintements de verres. Combien y a-t-il de convives ?

PROBABILITÉS



Blaise Pascal
(1623 - 1662)



Andrey Kolmogorov
(1903 - 1987)

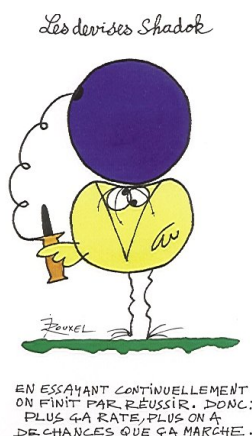
La théorie des probabilités est née de l'étude par les mathématiciens des jeux de hasard. D'ailleurs, le mot hasard provient du mot arabe « az-zahr » signifiant dé à jouer.

On attribue au mathématicien et philosophe français Blaise Pascal les premières pierres de cet édifice théorique. Cette théorie s'est ensuite développée au cours des siècles pour devenir une discipline mathématique à part entière.

On doit au mathématicien russe Andrey Kolmogorov en 1933, une formalisation de la théorie des probabilités.

Quant à nous, nous pouvons prendre conscience de l'utilité d'un tel calcul si nous gardons à l'esprit le fait que la majorité des décisions que nous devons prendre comportent des éléments d'incertitude. C'est donc le cas en économie lorsque l'on décide d'introduire un nouveau produit, de lancer une campagne de publicité, d'investir une somme importante pour accroître la capacité de production d'une usine, de choisir le niveau d'un stock, d'accepter ou rejeter un lot de pièces peut-être défectueuses, de fixer le prix d'un produit par exemple. Dans chaque cas l'avenir est entaché d'un élément d'incertitude qu'il est impossible d'éliminer, mais dont il est possible de calculer la probabilité de réalisation.

2.1 Premières notions



On lance deux dés bien équilibrés : un bleu et un rouge et on s'intéresse au total des points obtenus sur les deux faces supérieures. Ce total est un nombre entier compris entre 2 et 12.

Avant de lancer les dés, on ne peut prévoir quel sera ce total : on a à faire à **une expérience aléatoire**. L'**ensemble** de tous les résultats que l'on peut obtenir au cours de cette expérience, ici exprimant le total des 2 dés, est appelé l'**univers de l'expérience**.

On peut s'intéresser à la réalisation de certains **événements** tels que : « obtenir un total de 8 points » ou bien « obtenir un total de 8 ou 3 points » ou « obtenir un total de points pairs », etc. . .

On a lancé 500 fois ces deux dés et noté chaque fois le total obtenu :

Total des points	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nbre. d'apparitions	13	28	43	58	72	85	66	55	40	26	14

- L'événement « le total est 8 » est réalisé 66 fois sur 500 lancers soit une fréquence de $0,132 = 13,2\%$
- L'événement « le total est 3 » est réalisé à une fréquence de $0,056 = 5,6\%$
- La fréquence de l'événement « le total est pair » s'obtient en ajoutant les fréquences de tous les totaux pairs : on trouve $0,496 = 49,6\%$ et la fréquence de l'**événement complémentaire** « le total est impair » est la différence : $1 - 0,496 = 0,504 = 50,4\%$.

Si ces deux dés sont utilisés à l'occasion d'un jeu de hasard, le joueur qui parie sur un total de 8 semble avoir une plus grande probabilité de gagner que celui qui parie sur un total de 3, si l'on estime que cette simulation de 500 lancers est digne de confiance...

Une **probabilité** est un **modèle théorique** pour rendre compte des chances de réalisation d'un événement, conforme aux fréquences. Dans le cas précédent, on tentera de développer un modèle mathématique permettant d'éviter la simulation des 500 lancers.

Le saviez-vous : À propos de lancers de pièce de monnaie :



Georges-Louis Leclerc
comte de Buffon
(1707-1788)

- Georges-Louis Leclerc de Buffon (~1750) lança 4040 fois une pièce de monnaie et constata que face était apparue dans $50,69\%$ des lancers.
- Karl Pearson (au début du 20^e siècle) fit la même expérience, mais 24'000 fois ; il s'aperçut qu'il y avait $50,05\%$ de faces.



Karl Pearson
(1857 - 1936)

Précisons ci-dessous les mots définis dans l'exemple qui précède :

Définition: Une **expérience aléatoire** est une expérience qui possède les deux propriétés suivantes :

- On ne peut prédire avec certitude le résultat de l'expérience.
- On peut décrire, AVANT l'expérience, l'ensemble des résultats possibles.

L'**univers** d'une expérience aléatoire est l'ensemble U de toutes les **issues possibles** que l'on peut obtenir au cours de cette expérience.

Exemple 1: Décrire l'univers ainsi que le nombre d'issues possibles des expériences aléatoires proposées :

- Lancer une pièce de monnaie :

- Jeter un dé :

- Jeter deux fois de suite le même dé :

Définition: Soit U l'univers d'une expérience aléatoire.
 Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers U . On note les événements par des lettres majuscules.
 Le sous-ensemble vide \emptyset est l'**événement impossible** et l'univers U est l'**événement certain**.

Exemple 2: On tire au hasard 1 jeton parmi les 3 jetons suivants : ① ② ③

L'Univers $U = \{1; 2; 3\}$

Les 8 événements possibles sont :

- | | |
|------------------------------------|-----------------------|
| • « Obtenir le jeton 1 » | $A = \{1\}$ |
| • « Obtenir le jeton 2 » | $B = \{2\}$ |
| • « Obtenir le jeton 3 » | $C = \{3\}$ |
| • « Obtenir le jeton 1 ou 2 » | $D = \{1; 2\}$ |
| • « Obtenir le jeton 1 ou 3 » | $E = \{1; 3\}$ |
| • « Obtenir le jeton 2 ou 3 » | $F = \{2; 3\}$ |
| • « Obtenir le jeton 1 ou 2 ou 3 » | $G = \{1; 2; 3\} = U$ |
| • « Obtenir le jeton 4 » | $H = \emptyset$ |

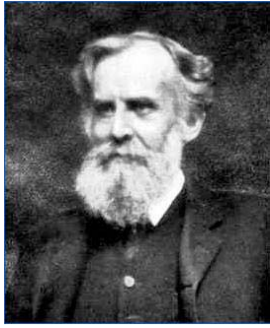
Définition: Soit U l'univers d'une expérience aléatoire, A et B deux événements.

- L'événement \overline{A} est l'**événement complémentaire** de A .
- L'événement **A et B** est réalisé lorsque les événements A et B se réalisent tous les deux simultanément.

L'événement " A et B " est représenté par $A \cap B$.

- L'événement **A ou B** est réalisé lorsque l'un au moins des événements A ou B se réalise.

L'événement " A ou B " est représenté par $A \cup B$.

Diagrammes:

John Venn
(1834-1923)

Exemple 3: On lance un dé à 6 faces. On considère les événements :

- $A =$ « on obtient un nombre pair » ;
- $B =$ « on obtient un nombre > 3 ».

Représenter le diagramme de la situation :

On observe que :

- $\overline{A} = \{1; 3; 5\} =$ « obtenir un nombre impair » ;
- $\overline{B} = \{1; 2; 3\} =$ « obtenir un nombre ≤ 3 » ;
- $A \cap B = \{4; 6\} =$ « obtenir un nombre pair et supérieur à 3 » ;
- $A \cup B = \{2; 4; 5; 6\} =$ « obtenir un nombre pair ou un nombre supérieur à 3 ».

Exemple 4: On lance simultanément 3 pièces de monnaie.

a) Déterminer l'univers U des événements possibles :

$$U = \{$$

b) On considère les événements suivants :

- $A =$ « avoir au moins un pile » ;
- $B =$ « avoir plus de pile que de face »

Effectuer le diagramme de Venn

c) Compléter les lignes suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \bar{A} &= \{ \hspace{10em} \} \\ &= \text{« »} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \bar{B} &= \{ \hspace{10em} \} \\ &= \text{« »} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad A \cup B &= \{ \hspace{10em} \} \\ &= \text{« »} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad A \cap B &= \{ \hspace{10em} \} \\ &= \text{« »} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \bar{A} \cap \bar{B} &= \{ \hspace{10em} \} \\ &= \text{« »} \end{aligned}$$

Exercice 2.1: On lance trois fois de suite une pièce de monnaie et on note les résultats obtenus, par exemple PPF. Déterminer :

- a) l'univers U de cette expérience aléatoire.
- b) l'événement $A = \text{« pile sort en premier »}$.
- c) l'événement $B = \text{« face ne sort pas au deuxième lancer »}$.
- d) l'événement \bar{A} .
- e) l'événement $A \cap B$.
- f) l'événement $C = \text{« obtenir au moins deux fois face »}$.

Exercice 2.2: Soit U l'ensemble des élèves du gymnase, A celui des élèves de 1^{re} année, B celui des élèves de 2^e, C celui des élèves de 3^e, F l'ensemble des filles du gymnase et S l'ensemble des élèves de nationalité suisse. Décrire par des phrases les ensembles suivants :

- a) $(A \cup B) \cap F$
- b) $F \cap \bar{S}$
- c) $(A \cup C) \cap \bar{F} \cap S$

Exercice 2.3: On lance un dé trois fois de suite et on note les issues obtenues, par exemple $(2; 5; 3)$, $(1; 1; 6)$, ...

Soit les événements : • $A = \text{« obtenir au moins un 6 »}$;
 • $B = \text{« obtenir au plus un 1 »}$.

Parmi les événements :

$$A ; B ; \bar{A} ; \bar{B} ; A \cup B ; \bar{A} \cup \bar{B} ; A \cap B ; \bar{A} \cap \bar{B}$$

lesquels contiennent le résultat $(1; 1; 3)$?

2.2 Approche intuitive de la notion de probabilité

Dans cette approche, nous allons utiliser les méthodes de dénombrement étudiées précédemment, c'est-à-dire l'analyse combinatoire.

Si on tire deux cartes d'un jeu de 36 cartes bien brassé et si le tirage se fait au hasard, sans tricher. L'univers sera constitué de tous les tirages possibles de 2 cartes parmi les 36. Sans les décrire, nous savons qu'il y en a :

$$C_2^{36} = \frac{36!}{34! \cdot 2!} = 630 \text{ possibilités.}$$

Si maintenant, on s'intéresse parmi ces possibilités à l'événement $A = \ll \text{obtenir deux as} \gg$. Nous pouvons calculer le nombre de possibilités d'obtenir 2 as à l'aide de :

$$C_2^4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \text{ possibilités.}$$

La probabilité d'obtenir 2 as en tirant au hasard 2 cartes dans un jeu de 36 cartes est donc :

$$P(A) = 6 \text{ chances parmi les } 630 = \frac{6}{630} = 0,00952 = 0,95 \%$$

Cette approche intuitive conduit à la définition suivante :

Définition: Soit U l'univers d'une expérience aléatoire. La **probabilité** d'un événement A , notée $P(A)$, est définie par le rapport :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Remarques:

- a) Cette définition est valable uniquement si tous les tirages ont la même chance de se réaliser. On dira alors que les résultats sont **équiprobables**.

Par exemple, les résultats « j'obtiens pile » ou « j'obtiens face » en lançant une pièce de monnaie pourraient ne pas être équiprobables si la pièce est faussée. Dès lors, on ne pourrait plus utiliser ainsi la formule précédente.

- b) La probabilité d'un événement est un nombre réel compris entre 0 et 1. On l'exprime volontiers sous la forme d'un pourcentage.
- c) Dans la réalité, il est relativement rare qu'il soit possible de dénombrer les cas favorables et les cas possibles. Par exemple, les meilleurs météorologues ne savent pas chiffrer avec certitude la probabilité de l'événement « il fera beau demain ».

Exemple 5: En jetant un dé deux fois de suite, quelle est la probabilité d'obtenir :

- a) 2 nombres pairs ? b) 1 nombre pair et 1 nombre impair ?

Exemple 6: Il y a 5 calculatrices défectueuses dans un lot de 25 calculatrices. On en choisit simultanément 4 au hasard.

Quelle est la probabilité que :

- a) toutes les calculatrices fonctionnent ?
b) au moins 3 calculatrices fonctionnent ?

Exemple 7: Jouer à l'EURO MILLIONS, c'est choisir cinq nombres parmi les nombres 1 à 50 et deux étoiles parmi 12 (numérotées de 1 à 12).

Quelle est la probabilité des événements suivants :

- a) A = « gagner le gros lot » ?
b) B = « trouver 3 bons numéros et 1 étoile » ?
c) C = « trouver 2 bons numéros et au moins 1 étoile » ?



Exercice 2.4: On dispose de 26 jetons, gravés avec les 26 lettres de l'alphabet. On tire successivement et sans remise trois jetons. Quelle est la probabilité d'obtenir :

- a) 3 consonnes ?
- b) 3 voyelles ?
- c) le mot MOI ?
- d) le mot MOI ou l'une de ses anagrammes ?

Exercice 2.5: On lance quatre fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité d'obtenir :

- a) exactement 2 fois faces ?
- b) au moins trois fois face ?

Exercice 2.6: L'agence *CHKultur* organise des visites culturelles dans 8 villes de Suisse (parmi celles-ci, on y trouve Lausanne, Genève, Fribourg et Berne). Chaque visite comprend 4 villes, chaque ville n'est visitée qu'une fois et l'ordre de passage dans les 4 villes choisies a de l'importance.

Parmi toutes les visites possibles, calculer la probabilité qu'elles :

- a) débutent à Lausanne ?
- b) débutent à Lausanne et comprennent la visite de Genève ?
- c) comprennent une visite à Berne et à Fribourg ?

Exercice 2.7: Un paquet de 12 cartes est composé de 4 rois, 4 dames et 4 valets. On tire 5 cartes simultanément. Quelle est la probabilité de tirer :

- a) 2 rois, 2 dames et 1 valet ?
- b) Les 4 rois ?

Exercice 2.8: Un sac contient trois objets rouges, quatre objets bleus et cinq objets jaunes. On tire simultanément trois objets.

Quelle est la probabilité des événements :

- a) $A =$ « les trois objets tirés sont jaunes » ?
- b) $B =$ « il y a un objet de chaque couleur » ?
- c) $C =$ « aucun objet n'est rouge » ?
- d) $D =$ « il y a au moins un objet rouge » ?
- e) $E =$ « il y a au moins un objet bleu » ?
- f) $F =$ « il y a au plus un objet bleu » ?

Exemple 8: On tire simultanément 8 cartes d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité de tirer au moins un as ?

Exercice 2.9: On tire simultanément 8 cartes d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité des événements suivant :

- a) $A =$ « parmi les 8 cartes, il y a l'as de cœur » ?
- b) $B =$ « il n'y a aucun as parmi les 8 cartes » ?
- c) $C =$ « il y a au moins un as parmi les 8 cartes » ?

Exercice 2.10: Un récipient contient 70 boules sur lesquelles sont inscrits les 70 premiers nombres entiers non nuls. On tire trois boules simultanément. Quelle est la probabilité que parmi ces trois nombres :

- a) figurent deux multiples de 5 ?
- b) ne figure aucun carré parfait ?
- c) figure au moins un carré parfait ?

Exercice 2.11: On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité de tirer :

- | | |
|--|----------------------------------|
| a) 5 carreaux ? | b) 2 carreaux et 3 cœurs ? |
| c) 5 carreaux ou 5 cœurs ? | d) 5 cartes de la même famille ? |
| e) les 4 rois ? | f) 3 rois et 2 dames ? |
| g) aucun roi ? | h) au moins un roi ? |
| i) au plus un roi ? | |
| j) 2 cartes d'une famille puis 3 d'une autre famille ? | |

Exercice 2.12: On jette un dé trois fois. Quelle est la probabilité d'obtenir un total :

- a) de 15 points ?
- b) d'au moins 15 points ?
- c) de strictement moins de 15 points ?

Exercice 2.13: On lance une pièce dix fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir quatre fois pile et six fois face.

2.3 Probabilités en utilisant un diagramme de Venn

Exemple 9: Dans un groupe de 35 élèves, 19 font du volley, 22 du basket et 14 pratiquent les 2 sports.

En choisissant un élève au hasard, Calculer la probabilité des événements :

- $A =$ « il pratique les deux sports » ;
- $B =$ « il ne pratique aucun sport » ;
- $C =$ « il ne pratique que du volley » ;
- $D =$ « il pratique du basket ou du volley ».

En choisissant deux élèves au hasard, Calculer la probabilité :

- $E =$ « qu'ils pratiquent les deux du volley ».

Exercice 2.14:

Dans une assemblée de 500 personnes, 300 comprennent le français, 200 l'italien, 90 l'anglais, 160 à la fois le français et l'italien, 60 à la fois le français et l'anglais, 40 à la fois l'italien et l'anglais et 20 comprennent les trois langues. Si on choisit une personne au hasard dans cette assemblée, quelle est la probabilité que cette personne comprenne :

- a) Exactement deux de ces trois langues ?
- b) L'une au moins de ces trois langues ?

Exercice 2.15:

Un appareil, fabriqué en très grande série, peut être défectueux à cause de deux défauts différents désignés par A et B. 10 % des appareils ont le défaut A, 8 % le défaut B et 4 % les deux défauts simultanément. Un client achète l'un des appareils produits.

Représenter la situation sur un diagramme de Venn, puis calculer

- a) la probabilité que cet appareil ne présente aucun défaut ;
- b) la probabilité que cet appareil ne présente que le défaut A ;
- c) la probabilité que cet appareil ne présente que le défaut B.

Exercice 2.16: On tire au hasard une carte d'un jeu ordinaire de 52 cartes. Déterminer la probabilité des événements suivants :

- a) $A =$ « on tire une carte noire » ;
- b) $B =$ « on tire une figure (valet, dame ou roi) » ;
- c) $C =$ « on tire une carte noire ou une figure ».

Exercice 2.17: Dans une classe de 25 élèves, on a constaté que 10 élèves portent une casquette, 5 élèves portent une montre et 12 élèves portent des lunettes. De plus, tous ceux qui portent une montre ont une casquette. Il y a 3 élèves qui portent une montre, mais pas de lunettes. Enfin, 6 élèves sont sans casquette et ont des lunettes. On choisit au hasard trois élèves de cette classe.

- a) Combien y a-t-il de possibilités de faire ce choix ?
- b) Quelle est la probabilité qu'ils portent tous les trois des lunettes ?
- c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des trois porte une montre ?

On choisit au hasard un élève de cette classe.

- d) Quelle est la probabilité qu'il ne porte ni montre, ni casquette, ni lunettes ?
- e) Quelle est la probabilité qu'il porte une montre ou une casquette ?

Les diagrammes de Venn permettent de visualiser quelques propriétés importantes.

Propriétés: Soit U l'univers d'une expérience aléatoire et A et B deux événements, on a alors :

$$\text{a) } P(U) = 1 \qquad \text{b) } P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$\text{c) } P(A) \leq P(B) \text{ si } A \subset B$$

$$\mathbf{d)} \quad P(A \cup B) = \begin{cases} P(A) + P(B) & \text{si } A \cap B = \emptyset \\ P(A) + P(B) - P(A \cap B) & \text{si } A \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

Exemple 10: On tire au hasard une carte d'un jeu ordinaire de 36 cartes. On considère les événements :

- $A = \text{« on tire une carte noire »}$
- $B = \text{« on tire une dame »}$
- $C = \text{« on tire une carte de cœur »}$
- $D = \text{« on tire une figure (valet, dame ou roi) »}$

Compléter :

- $P(A) = \dots \quad P(B) = \dots \quad P(C) = \dots \quad P(D) = \dots$
- $P(\text{« on tire une dame noire »}) =$
- $P(\text{« on tire une figure de cœur »}) =$

En déduire alors :

- $P(\text{« on tire une carte noire ou une dame »}) =$
- $P(\text{« on tire une carte de cœur ou une figure »}) =$

Exercice 2.18: On jette successivement deux pièces de monnaies. On va s'intéresser à l'apparition des piles (P) ou des faces (F).
On considère les trois événements suivants :

- $A =$ « la première pièce tombe sur pile » ;
- $B =$ « la deuxième pièce tombe sur pile » ;
- $C =$ « la première ou la deuxième pièce tombe sur pile ».

- a) Décrire l'univers de cette expérience aléatoire
- b) Calculer $P(A)$, $P(B)$ puis $P(A \cap B)$.
- c) En déduire $P(C)$.

Exercice 2.19: On a placé 50 boules, numérotées de 1 à 50 dans un sac. L'expérience consiste à tirer une boule du sac et de prendre note du numéro. On envisage les 3 événements suivants :

- $A =$ « le numéro tiré est pair » ;
- $B =$ « le numéro tiré est multiple de 7 » ;
- $C =$ « le numéro tiré est multiple de 8 ».

- a) Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.
- b) Calculer la probabilité que le numéro tiré soit multiple de 7 ou multiple de 8.
- c) Calculer la probabilité que le numéro tiré soit pair ou multiple de 7.
- d) Calculer la probabilité que le numéro tiré soit pair ou multiple de 8.

2.4 Probabilités en utilisant un diagramme en arbre

Les diagrammes en arbre constituent une représentation souvent utilisée pour décrire et étudier des expériences aléatoires se déroulant **en plusieurs étapes**. Illustrons cette méthode par un exemple

Exemple 11: Un sac contient 4 billes rouges, 2 billes jaunes et 3 billes vertes. On tire successivement et sans remise deux billes. Trouver la probabilité des événements suivants :

- $A =$ « les deux billes tirées sont rouges » ;
- $B =$ « la première bille est jaune et la seconde est verte » ;
- $C =$ « une des billes tirées est rouge et l'autre est jaune ».

Toutes les issues possibles peuvent être représentées par un diagramme en arbre

- $P(A) =$

- $P(B) =$

- $P(C) =$



On a déterminé les probabilités en multipliant les probabilités des branches correspondantes

Exercice 2.20:

Une urne contient au départ 5 boules blanches et 7 noires. Chaque fois que l'on tire une boule, on note sa couleur, puis on la réintroduit ainsi que deux nouvelles boules de la même couleur qu'elle. Quelle est la probabilité que les deux premières boules tirées soient noires, puis les deux suivantes blanches ?

Exercice 2.21: Curieux climat que celui de la petite île d'Eigoloroetem. Il y fait : soit beau toute la journée, soit mauvais toute la journée. L'affirmation "demain, il fera le même temps qu'aujourd'hui" est vraie dans 70 % des cas. Il a fait beau le vendredi de Pâques, calculer la probabilité des événements suivants :

- a) A : « il a fait beau le dimanche de Pâques » ;
- b) B : « il a fait beau le samedi et le dimanche de Pâques » ;
- c) C : « il a fait beau le samedi ou le dimanche de Pâques ».

Exercice 2.22: Deux urnes contiennent chacune 3 boules vertes et 2 jaunes. On tire une boule de la première urne que l'on introduit dans la deuxième urne. Après avoir mélangé, on tire une boule de cette deuxième urne.

- a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte ?
- b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule jaune ?

Exercice 2.23: L'éclairage d'une pièce nécessite l'emploi de deux lampes A et B différentes. Les probabilités de défaillance de ces lampes après 100 heures d'utilisation sont de 0,12 pour A et 0,18 pour B.

- a) Représenter la situation sur un arbre.
- b) Calculer la probabilité pour que les deux lampes tombent en panne toutes les deux.
- c) En déduire la probabilité pour avoir au moins une lampe qui fonctionne.
- d) Quelle est la probabilité pour qu'une lampe, et une seule tombe en panne ?

Exercice 2.24: À Morges, le temps au petit jour suit la loi suivante :

temps	pluie	nuages	ciel bleu
probabilité	0,2	0,5	0,3

Monsieur Keller prend son parapluie en partant le matin avec une probabilité de :



100 % s'il pleut 60 % s'il y a des nuages 20 % si le ciel est bleu.

Calculer la probabilité que monsieur Keller parte demain matin en emportant son parapluie.

Exercice 2.25: 98 % des bébés survivent à l'accouchement. Cependant, 15 % des naissances nécessitent une césarienne et lorsqu'une césarienne est pratiquée, les bébés survivent à 96 %. Si une femme enceinte choisie au hasard ne subit pas de césarienne, quelle est la probabilité que son bébé survive ?

Exercice 2.26: Une personne d'humeur joyeuse essaie d'ouvrir sa porte après une soirée bien arrosée. Elle a un trousseau de 10 clés indiscernables vu son état ! Elle essaie les clés en remettant chaque fois la clé utilisée dans le trousseau. Quelle est la probabilité d'ouvrir la porte :

- a) au premier essai ?
- b) au sixième essai ?
- c) en moins de 4 essais ?

 www.javmath.ch 

Coin du philosophe: « Le nom seul de calcul des probabilités est un paradoxe : la probabilité, opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas ?



Henri Poincaré
(1854-1912)

Cependant, beaucoup de savants éminents se sont occupés de ce calcul, et l'on ne saurait nier que la science n'en ait tiré quelque profit.

Comment expliquer cette apparente contradiction ? La probabilité a-t-elle été définie ? Peut-elle même être définie ? »

Henri Poincaré

Qu'en pensez-vous:



2.5 Épreuves de Bernoulli (ou loi binomiale)



Jacques Bernoulli
(1654 – 1705)
mathématicien suisse

Supposons qu'on réalise plusieurs fois (n fois) successivement la même expérience qui n'a que 2 issues possibles appelées succès (S) et échec (E). On suppose de plus que le résultat de la 2^e expérience ne dépend pas du résultat de la 1^{re}. De même, le résultat de la 3^e expérience ne dépend pas des résultats des 2 premières, etc. . .

Une telle expérience est appelée :

épreuves de Bernoulli à n étapes.

- Exemples:**
- On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie (bien équilibrée). On désigne, par exemple, l'issue d'obtenir pile par (S) succès et donc face par (E) échec.
 - On lance 7 fois un dé bien équilibré. On désigne, par succès (S) l'issue d'un six et par échec celle d'un autre nombre de points.

Formule: Lors d'**épreuves de Bernoulli à n étapes**, où p exprime la probabilité de succès, la probabilité d'obtenir exactement k succès, notée $\mathcal{B}(n; k; p)$, se calcule par :

$$\mathcal{B}(n; k; p) = \overline{P}_n(k; n - k) \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Justification : Cf. plus loin

Reprenons les 2 exemples ci-dessus :

Exemple 12: Quelle est la probabilité d'obtenir 6 fois pile lors des 10 lancers d'une pièce de monnaie ?

Exemple 13: Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois un six lors des 7 lancers d'un dé ?

Exemple 14: Une urne contient 5 boules blanches et 7 noires. On extrait une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne en mélangeant avec soin.

- a) En quoi cette situation correspond-elle bien à des épreuves de Bernoulli ?
- b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 6 boules blanches en 13 tirages ?

à suivre !! (page 41)

Exercice 2.27: Une étudiante, mal préparée pour son examen de biologie, décide de répondre au hasard aux quatre questions d'un QCM. Chaque question offre un choix de 5 réponses dont une seule est correcte. Déterminer la probabilité qu'elle réponde correctement à exactement 3 questions.

Exercice 2.28: Un vendeur estime qu'un appel téléphonique sur 4 se termine par une vente. Si l'on considère que les résultats de différents appels sont des événements indépendants, trouver la probabilité que ce vendeur réalise au moins 2 ventes à la suite de 5 appels.

Exercice 2.29: Nous venons de poser la formule de Bernoulli sous la forme :

$$\mathcal{B}(n; k; p) = \overline{P}_n(k; n - k) \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Dans la plupart des formulaires, on la trouve sous la forme :

$$\mathcal{B}(n; k; p) = C_k^n \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Comment peut-on justifier qu'il y ait 2 formes pour la même formule ?

Justification: Formule de Bernoulli

Nous justifierons cette formule en étudiant un cas simple à l'aide d'un arbre. La généralisation pourra se faire en imaginant augmenter le nombre de branches de cet arbre.

Une urne contient 5 boules blanches et 7 noires. On extrait une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne en mélangeant avec soin. On procède ainsi à 4 tirages. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 boules blanches ?

Exercice 2.30:

Un tireur à l'arc atteint sa cible avec une probabilité de 60 %. Il tire successivement 8 flèches.

- a) Quelle est la probabilité qu'il atteigne exactement cinq fois la cible ?
- b) Quelle est la probabilité qu'il atteigne au moins une fois sa cible ?
- c) Combien de flèches doit-il tirer pour que la probabilité qu'il atteigne au moins une fois la cible soit supérieure à 95 % ?

2.6 Et si l'inconnue est la taille de l'arbre

Exemple 15: *Suite de l'exemple page 39 :*

Une urne contient 5 boules blanches et 7 noires. On extrait une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne en mélangeant avec soin.

- c) **Combien de tirages** doit-on effectuer pour que la probabilité d'avoir au moins une boule blanche soit de plus de 95 % ?

Exercice 2.31: La classe 1M06 compte 16 élèves parmi lesquels seuls deux n'ont pas de Natel. On peut estimer que cette proportion est la même dans toutes les classes de notre gymnase. Combien d'élèves dois-je choisir dans notre gymnase pour que la probabilité d'en obtenir au moins un sans Natel soit plus grande que 99,9 % ?

Exercice 2.32: Un investisseur réalise un profit avec 30 % de ses placements. Son patron exige qu'il fasse au moins 1 placement rentable durant la prochaine année.
Combien de placements doit-il faire pour que la probabilité qu'au moins un placement soit rentable, soit supérieure ou égale à 80 % ?

2.7 Probabilité conditionnelle et événements indépendants

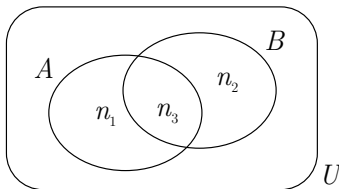
Que devient la probabilité d'un événement A si l'on dispose d'informations supplémentaires susceptibles d'influencer la réalisation de A ?

Ce type de probabilité s'appelle une **probabilité conditionnelle**.

Exemple 16: (sous forme d'un diagramme de Venn) :

Une enquête réalisée lors d'une assemblée internationale a montré que 60 % des participants comprennent l'anglais, 45 % l'italien et 15 % les deux langues.

- a) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans cette assemblée comprenne l'italien ?
- b) Que devient cette probabilité si vous savez déjà qu'elle comprend l'anglais ?



Dans cet exemple, nous avons constaté que :

Soit U un univers comprenant n éléments répartis dans 2 événements A et B . Alors, la probabilité que l'événement A se réalise **sachant que** B a eu lieu se calculera :

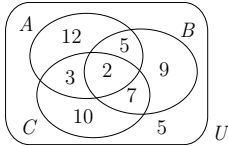
$$P(A \text{ sachant } B) = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}} = \frac{n_3}{n_2 + n_3} = \frac{\frac{n_3}{n}}{\frac{n_2 + n_3}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Formule: Soit A et B deux événements avec $P(B) \neq 0$.
 On appelle **probabilité conditionnelle de A sachant B** la probabilité que l'événement A soit réalisé sachant que B est réalisé. On la note $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exercice 2.33:

Trois événements d'un univers U sont représentés dans le schéma ci-contre. Calculer :



a) $P(A|B)$

b) $P(B|A)$

c) $P(A|\overline{B})$

d) $P(\overline{A}|C)$

e) $P(\overline{C}|A \cup B)$

Exercice 2.34:

Un sondage est effectué dans une société comprenant 40 % de cadres et 60 % d'employés. On sait que 20 % des cadres et 10 % des employés de cette société savent parler l'anglais. On interroge un individu au hasard. Quelle est la probabilité pour que ce soit :

- a) un cadre sachant parler l'anglais ?
- b) un employé sachant parler l'anglais ?
- c) une personne sachant parler l'anglais.

On interroge alors individuellement d'autres employés

- d) Sachant que l'individu interrogé sait parler l'anglais, quelle est la probabilité pour que ce soit un employé ?
- e) Sachant qu'il s'agit d'un cadre, quelle est la probabilité qu'il sache parler l'anglais ?

Exemple 17: (sous forme d'un arbre) :

La société *SuissTrans* reçoit 60 % de ses stocks de Genève (G) et 40 % de Berne (B). Les livraisons en provenance de Genève sont en retard dans 20 % des cas tandis que celles en provenance de Berne sont en retard dans seulement 5 % des cas. Les livraisons arrivent à l'entrepôt de la société d'une façon aléatoire.

Sachant qu'une livraison est arrivée en retard, quelle est la probabilité qu'elle provienne de Berne ?

Exercice 2.35: Reprendre la donnée de l'exercice précédent en modélisant la situation par un arbre.

Exemple 18: (résolu à l'aide de la combinatoire) :

Xavier tire 4 cartes parmi les 36 cartes d'un jeu. Yves a pu apercevoir qu'il s'agit de 4 cartes rouges.

Sachant cela, quelle est la probabilité que Xavier ait 2 as ?

Ainsi l'on doit calculer :

$$\begin{aligned}
 P(2 \text{ as} \mid 4 \text{ rouges}) &= \frac{P(2 \text{ as rouges et 2 autres rouges})}{P(4 \text{ rouges})} \\
 &= \frac{\frac{C_2^2 \cdot C_2^{16}}{C_4^{36}}}{\frac{C_4^{18}}{C_4^{36}}} = \frac{C_2^{16}}{C_4^{18}} = \frac{2}{51}
 \end{aligned}$$

Exercice 2.36: Une urne contient 3 billes rouges numérotées de 1 à 3, une bille bleue portant le numéro 4 et 4 billes vertes numérotées de 5 à 8. On choisit au hasard une bille de l'urne.

- a) Quelle est la probabilité que la bille soit rouge ?
- b) Sachant que le chiffre sur la bille est pair, quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

Exercice 2.37: On dispose d'un jeu de 36 cartes. L'expérience consiste à tirer une carte. On définit les événements :

- A = « la carte tirée est un cœur » ;
- B = « la carte tirée est un valet de cœur » ;
- C = « la carte tirée est une figure de pique (valet, dame ou roi) ou un cœur ».

Calculer $P(B \mid A)$, $P(A \mid C)$, $P(B \mid C)$, $P(C \mid B)$

Exercice 2.38: Une étude des fichiers de la CNA (caisse nationale d'assurance) concernant une région montre qu'en 2018, 17 % des personnes de moins de 70 ans ainsi que 75 % des personnes âgées de 70 ans ou plus ont été vaccinées contre la grippe. On sait que les personnes de 70 ans ou plus représentent 12 % de la population de cette région.

- On prend une personne au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit vaccinée ?
- Si on prend une personne vaccinée, quelle est la probabilité pour que ce soit une personne de moins de 70 ans ?
- Si on prend une personne de moins de 70 ans, quelle est la probabilité qu'elle soit vaccinée ?

Exercice 2.39: Un inspecteur vérifie la grosseur de chaque boulon produit par une nouvelle machine. Les données qu'il a recueillies ont permis l'élaboration du tableau suivant :

Événement	Probabilité
trop gros	0,15
trop petit	0,25

Sachant qu'un boulon choisi au hasard n'est pas de la bonne grosseur, déterminer la probabilité qu'il soit trop gros.

Qu'en pensez-vous:

???

Quand on prend l'avion, la probabilité pour qu'il y ait une bombe est évaluée à $\frac{1}{10'000}$.

Ainsi la probabilité pour qu'il y en ait deux est de $\frac{1}{100'000'000}$.

On peut donc en conclure que quand on prend l'avion, on augmente sa sécurité en emportant une bombe.

Exemple 19: On jette trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée. On considère les événements suivants :

- $A =$ « le premier jet donne face » ;
- $B =$ « le second jet donne face » ;
- $C =$ « seuls deux jets consécutifs donnent face ».

a) Décrire l'univers U de cette expérience aléatoire :

$$U = \left\{ \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\}$$

b) Calculer et comparer $P(A)$ avec $P(A|B)$.

c) Calculer et comparer $P(B)$ avec $P(B|C)$.

d) Calculer et comparer $P(A)$ avec $P(A|C)$.

Intuitivement, nous dirons qu'un événement A est indépendant d'un événement B si la probabilité pour que A se produise n'est pas influencé par le fait que B se soit ou ne se soit pas produit. On pourra alors écrire :

$$P(A) = P(A|B) \iff P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Définition: On dit que les événements A et B sont **indépendants**



$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

-
- Exemple 20:** a) On jette successivement deux dés équilibrés. On note les événements suivants :
- $A =$ « la somme des dés est 7 », ainsi $P(A) = 6/36$;
 - $B =$ « le premier dé donne 4 », ce qui donne $P(B) = 1/6$;
 - $A \cap B =$ « la somme des dés est 7 et le premier dé donne 4 », ainsi $P(A \cap B) = 1/36$.

On observe donc, sur cet exemple, que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Les événements A et B sont indépendants. Le fait de savoir que le premier jet indique un 4 n'influence pas la probabilité d'obtenir une somme de 7.

- b) Qu'en est-il si l'on remplace l'événement A par « La somme des dés est 6 » ?

$$P(A) = \dots\dots\dots P(B) = \dots\dots\dots P(A \cap B) = \dots\dots\dots$$

$\implies A$ et B sont $\dots\dots\dots$

Exercice 2.40:

On jette une pièce de monnaie trois fois. On considère les événements suivants : $A =$ « le premier jet donne face » ; $B =$ « le second jet donne face ».

- a) Déterminer l'Univers de cette expérience aléatoire.
- b) Calculer $P(B)$, $P(B|A)$, $P(A)$, et $P(A \cap B)$.
- c) En déduire que les 2 événements A et B sont indépendants.

Exercice 2.41:

Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie.

	Tennis	Équitation	Voile
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

On choisit un élève au hasard.

- a) Les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?
- b) Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?

2.8 Un petit mélange

Exercice 2.42: On a établi que, dans une population donnée, 60 % des familles occupent une maison individuelle et parmi elles, 80 % en sont propriétaires.

Parmi les familles n'occupant pas de maison individuelle, 25 % en sont propriétaires. On choisit une famille au hasard dans la population considérée.

- a) Montrer que la probabilité qu'elle soit propriétaire de son logement est égale à 58 %.
- b) Quelle est la probabilité qu'elle occupe une maison individuelle sachant qu'elle n'en est pas propriétaire.
- c) Quelle est la probabilité qu'elle soit propriétaire de son logement sachant qu'il s'agit d'une maison individuelle.

Exercice 2.43: Une forêt abrite vingt cerfs. Cinq sont capturés, marqués et relâchés. Un peu plus tard, quatre sont de nouveau capturés. Quelle est la probabilité que deux d'entre eux soient marqués ?

Exercice 2.44: Soit A l'événement « une famille a des enfants des deux sexes », et B l'événement « une famille a au plus un garçon ».

- a) Montrer que A et B sont indépendants pour une famille de trois enfants.
- b) Est-ce toujours le cas pour une famille de deux enfants ?

Exercice 2.45: Un prof de math (!!) donne à sa classe 10 problèmes en expliquant que l'examen final consistera à résoudre 5 de ces 10 problèmes, choisis au hasard. Si un étudiant sait résoudre 7 des 10 problèmes, quelle est la probabilité qu'il ou elle réponde correctement :

- a) Aux 5 problèmes (\Rightarrow note : 6) ?
- b) À au moins 3 problèmes (\Rightarrow note ≥ 4) ?

Exercice 2.46: On sort d'un jeu de cartes les 4 as et les 4 rois. On tire ensuite simultanément 2 cartes de ces 8 cartes. Quelle probabilité a-t-on de tirer :

- a) Deux as si l'on sait qu'une des deux cartes au moins est un as ?
- b) Deux as si l'on sait qu'une des deux cartes au moins est un as rouge ?
- c) Deux as si l'on sait qu'une des deux cartes est l'as de cœur ?

Exercice 2.47: Une agence de location de voitures dispose de 15 véhicules récents et de 35 anciens véhicules. L'agence a constaté que les clients à qui elle louait un véhicule récent avaient une panne dans 0,5 % des cas, alors que ceux à qui elle louait un véhicule ancien avaient une panne dans 2,5 % des cas.

- a) Calculer la probabilité qu'un véhicule loué au hasard tombe en panne.
- b) Un véhicule loué au hasard tombe en panne. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un ancien véhicule.

Soucieuse de son image de marque, l'agence décide de remplacer un certain nombre de ses anciens véhicules par des véhicules récents.

- c) Calculer le nombre d'anciens véhicules qu'il faut remplacer par des véhicules récents pour que les pannes arrivent moins d'une fois sur cent.

Exercice 2.48: Dans un porte-monnaie contenant des pièces d'un franc, de deux francs et de cinq francs, on dénombre en tout 30 pièces, dont 6 sont des pièces d'un franc et n sont des pièces de deux francs. Deux pièces s'échappent de ce porte-monnaie et tombent à terre.

- a) Montrer que la probabilité p que les deux pièces à terre soient de même valeur est donnée par $p = \frac{n^2 - 24n + 291}{435}$.
- b) Déterminer le nombre n de pièces de deux francs que doit contenir ce porte-monnaie pour que cette probabilité p soit minimale.
- c) Déterminer le nombre n de pièces de deux francs que doit contenir ce porte-monnaie pour que cette probabilité p soit maximale.

L'affaire Sally Clark

En 1996, un couple anglais Sally et Steve Clark ont le malheur de perdre leur fils Christopher de la mort subite du nourrisson (noté MSN). 13 mois plus tard, leur second fils Harry décède lui aussi de la même façon. Les parents sont alors soupçonnés d'avoir tué les deux enfants. Après enquête, la mère est inculpée de meurtres et emprisonnée. Au procès en 1999, elle est jugée coupable malgré l'absence de toutes preuves matérielles. L'argument de l'accusation est le suivant: dans une famille aisée, non-fumeur, dont la mère a plus de 26 ans, la probabilité d'une MSN est de $1/8'543$ (résultat d'une étude statistique, appréciez la précision ...). Notons MSN_1 et MSN_2 les événements « observer une première MSN », « observer une deuxième MSN » on a:

$$P(MSN_1 \cap MSN_2) = P(MSN_1) \cdot P(MSN_2) = (1/8'543)^2 \approx 1/73'000'000.$$

Une chance sur 73 millions ! Un tel événement ne pouvant être le seul fruit du hasard, la mère est forcément coupable ... et est condamnée à la réclusion à perpétuité.



Bien, décortiquons un peu tout ça et organisons la défense de Sally Clark.

- 1) La probabilité $1/8'543$ est obtenue en prenant en compte uniquement des facteurs qui minimisent le risque de MSN. Une donnée oubliée est le sexe masculin des deux enfants qui augmente considérablement les risques de MSN. D'autres études statistiques conduisent à une probabilité plus proche de $1/1'300$ (toute population confondue, le plus favorable pour la défense).
- 2) La relation $P(MSN_1 \cap MSN_2) = P(MSN_1) \cdot P(MSN_2)$ suppose les deux événements MSN_1 et MSN_2 indépendants et cela est totalement faux !
Des études statistiques montrent que la MSN est de 5 à 10 fois plus risquée dans une famille ayant déjà connu un tel drame ce qui va se traduire par:

$$P(MSN_2 | MSN_1) = 10 \cdot P(MSN) = 10 \cdot 1/1'300 = 1/130.$$

Nous avons donc:

$$P(MSN_1 \cap MSN_2) = P(MSN_1) \cdot P(MSN_2 | MSN_1) = \frac{1}{1'300} \cdot \frac{1}{130} = \frac{1}{169'000}$$

Plus rien à voir avec les $1/73'000'000$!

- 3) Mais ce n'est pas fini: il y a fort à parier que la probabilité avancée de $1/73'000'000$ ait été interprétée par les jurés comme la probabilité que Sally Clark soit innocente (et vous ?) ce qui n'a rien à voir comme je vais vous l'expliquer tout de suite.

Notons M_2 l'événement « 2 décès d'enfants nourrissons sont observés dans une famille » et I l'événement « la mère est innocente ». Tout le problème est d'évaluer $P(I | M_2)$

$$\text{Or on a } P(M_2 | I) = \frac{P(M_2 \cap I)}{P(I)} \Leftrightarrow P(M_2 \cap I) = P(I) \cdot P(M_2 | I)$$

On en déduit que:

$$P(I | M_2) = \frac{P(I \cap M_2)}{P(M_2)} = \frac{P(M_2 \cap I)}{P(M_2)} = \frac{P(I) \cdot P(M_2 | I)}{P(M_2)} = P(M_2 | I) \cdot \frac{P(I)}{P(M_2)}.$$

$P(M_2 | I)$ correspondant à $1/73'000'000$ corrigé en $1/169'000$.

On peut estimer que $P(I)$, probabilité qu'une mère ne tue pas ses deux enfants est très voisine de 1 et qu'au contraire $P(M_2)$, probabilité d'observer 2 décès de nourrissons est très proche de 0.

Donc le quotient $\frac{P(I)}{P(M_2)}$ est très grand !

- 4) Des travaux plus poussés permettent même d'évaluer: $P(I | M_2) \geq \frac{2}{3}$.

Ceci ne prouve pas l'innocence de Sally Clark mais détruit totalement l'argumentation de l'accusation. Le procès sera revu et Madame Clark est libérée en deuxième appel en 2003. Elle ne se remettra jamais des difficiles épreuves endurées et décédera (suicide ?) en 2007.

Source: <http://www.sallyclark.org.uk/>

Bibliographie

1. CRM, *Probabilités (2008)*, Édition du Tricorne
2. H. Bovet, *Probabilités (2005)*, Polymaths

Site Web

1. Le site companion de ce polycopié : www.javmath.ch
Avec une version pdf de ce polycopié et quelques exercices supplémentaires.
2. Le site *Nymphomath* de Didier Müller :

<http://www.nymphomath.ch/MADIMU2/PROBA/INDEX.HTM>

Support de cours en pdf avec des exercices et leurs solutions

On lance trois pièces de monnaie. Quelle est la probabilité que toutes trois retombent du même côté, que ce soit pile ou face ?

- Un de mes élèves m'affirme : "C'est $1/4$ bien sûr".
- Alors, je lui réponds : "Pourtant, si je lance trois pièces, il y en a forcément deux qui seront déjà du même côté ; la troisième y sera avec une chance sur deux. La réponse est donc $1/2$ ".

Qu'en pensez-vous ?

Quelques éléments de solutions

A.1 Le principe de multiplication

Exercice 1.1: 24

Exercice 1.2: a) $340 = 256 + 64 + 16 + 4$.

Il s'agit de considérer les nombres à un, deux, trois ou quatre chiffres.

b) 64 selon le même principe.

Exercice 1.3: a) 13'440

b) 5'376

Exercice 1.4: 1'594'323

Exercice 1.5: 2'880

Exercice 1.6: a) 2'340'000

b) 1'920'000

A.2 Les permutations

Exercice 1.7: $P_6 = 720$

Exercice 1.8: $\overline{P}_{11}(4; 4; 2) = 34'650$ $\overline{P}_9(4; 2; 2) = 3'780$

Exercice 1.9: $P_3 \cdot \overline{P}_5(2; 2) = 180$

Exercice 1.10: $3 \cdot P_4 + 2 \cdot P_3 + 2 \cdot P_2 + 1 + 1 = 90$

Exercice 1.11: $P_4 = 24$

Exercice 1.12: a) $P_9/9$ ou $P_8 = 40'320$

b) $2 \cdot P_7 = 10'080$

Exercice 1.13: a) $P_5 = 120$

b) même réponse. Pas d'influence

Exercice 1.14: $\overline{P}_{10}(7; 3) = 120$

Exercice 1.15: $P_4 = 24$

Exercice 1.16: $3 \cdot \overline{P}_4(2) = 36$

Exercice 1.17: a) $\overline{P}_7(2; 3; 2) = 210$

b) 40 Additionner (1'2..... avec 1'1.....)

Exercice 1.18: $\overline{P}_6(2; 2; 2) = 90$

A.3 Les arrangements

Exercice 1.19: $A_4^{10} = 5'040$

Exercice 1.20: a) $\overline{A}_5^{26} = 26^5 = 11'881'376$

b) $A_5^{26} = 7'893'600$

Exercice 1.21: a) $8^5 = 32'768$

b) $8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 4 = 6'720$

Exercice 1.22: a) $8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 4 = 6'720$

b) $8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 4 = 6'720$

Exercice 1.23: a) $\overline{A}_2^{26} = 26^2 = 676$

b) 677 (*un de plus que la partie a*)

Exercice 1.24: a) $A_2^3 = 6$

b) $2 \cdot 1 = 2$

Exercice 1.25: $5 \cdot \dots \cdot 5 = 5^4 = 625$

Exercice 1.26: $A_4^{10} = 5'040$

Exercice 1.27: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 900$

Exercice 1.28: Pas de solution proposée...

A.4 Les combinaisons

Exercice 1.29: $C_2^{12} = 66$ (*car pour qu'il y ait une poignée de main, il faut 2 personnes*)

Exercice 1.30: $C_2^9 = 36$

Exercice 1.31: $C_3^{31} = 4'495$

Exercice 1.32: $C_5^{10} \cdot C_2^6 = 3'780$

Exercice 1.33: $C_7^{10} = C_3^{10} = 120$ (*Et si vous compariez cette réponse à celle de l'exercice 1.14*)

Exercice 1.34: a) $C_4^4 \cdot C_1^{32} = 32$

b) $C_2^4 \cdot C_2^4 \cdot C_1^{28} = 1'008$

c) $C_5^{36} - C_5^{32} = 175'616$

d) $C_5^{36} - C_5^{32} - C_1^4 \cdot C_4^{32} = 31'776$

Exercice 1.35: $C_2^8 \cdot C_2^7 = 588$ (*car un rectangle est défini par 2 verticales parmi... et...*)

Exercice 1.36: a) $C_5^{15} = 3'003$

b) $C_3^7 \cdot C_2^8 = 980$

Exercice 1.37: $C_6^{45} = 8'145'060$

$C_3^6 \cdot C_3^{39} = 182'780$

$C_6^6 = 1$

A.5 Perm. - Arrang. - Combi. lequel choisir ?

Exercice 1.38: a) $A_3^{12} = 1'320$

b) $C_3^{12} = 220$

Exercice 1.39: a) $C_3^{12} = 220$

b) $A_3^{12} = 1'320$

c) $\overline{A}_3^{12} = 1'728$

Exercice 1.40: a) $6^3 = 216$

b) $2 \cdot 6^2 = 72$

c) $2 \cdot 6^2 = 72$

d) $1 \cdot 6^2 = 36$

Exercice 1.41: a) $C_8^{10} = 45$

b) $C_5^7 = 21$

c) $C_4^5 \cdot C_4^5 = 25$

d) $C_4^5 \cdot C_4^5 + C_5^5 \cdot C_3^5 = 35$

Exercice 1.42: Le triangle de Pascal

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \quad C_{10}^{14}x^4y^{10} = 1'001x^4y^{10}$$

Exercice 1.43: Il s'agit donc de constituer une chaîne d'égalités :

$$C_p^m + C_{p+1}^m = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = C_{p+1}^{m+1}$$

Exercice 1.44: $C_2^4 = 6$ (pensez au Δ de Pascal)

Exercice 1.45: a) 70 qui correspond à C_4^8

b) $3 \cdot 10 = 30$

c) $3/7 = 42,86\%$

Exercice 1.46: a) 40'320

b) 50'400

c) 16'800

Exercice 1.47: a) $C_3^{36} = 7'140$

b) $C_1^4 \cdot C_2^4 = 24$

c) $C_3^{32} = 4'960$

d) $C_3^{36} - C_3^{32} = 2'180$

e) $C_1^4 \cdot C_2^{32} = 1'984$

Exercice 1.48: $\overline{P}_8(2; 4; 2) = 420$

Exercice 1.49: $C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + C_5^5 = 31$

Exercice 1.50: a) 2'673

b) 5'832

c) 35

Exercice 1.51: a) 120

b) 72

c) 12

Exercice 1.52: a) 720

b) 360

c) 60

d) 240

e) 144

Exercice 1.53: a) $2,0923 \cdot 10^{13}$

b) $3,2514 \cdot 10^9$

c) $4,1618 \cdot 10^{11}$

Exercice 1.54: 8 convives (Il s'agit de résoudre l'équation $C_2^x = 28$)

B.1 Premières notions

- Exercice 2.1:**
- a) $U = \{\text{PPP}; \text{PPF}; \text{PFP}; \text{FPP}; \text{PFF}; \text{FPF}; \text{FFP}; \text{FFF}\}$
 - b) $A = \{\text{PPP}; \text{PPF}; \text{PFP}; \text{PFF}\}$
 - c) $B = \{\text{PPP}; \text{PPF}; \text{FPP}; \text{FPF}\}$
 - d) $\bar{A} = \{\text{FPP}; \text{FPF}; \text{FFP}; \text{FFF}\}$
 - e) $A \cap B = \{\text{PPP}; \text{PPF}\}$
 - f) $C = \{\text{FFP}; \text{FPF}; \text{PFF}; \text{FFF}\}$

- Exercice 2.2:**
- a) L'ensemble des filles de 1^{re} ou de 2^e année
 - b) L'ensemble des filles (du gymnase) n'ayant pas la nationalité suisse.
 - c) L'ensemble des garçons de 1^{re} ou 3^e année de nationalité suisse.

- Exercice 2.3:** \bar{A} ; \bar{B} ; $\bar{A} \cup \bar{B}$; $\bar{A} \cap \bar{B}$

B.2 Approche intuitive de la notion de probabilité :

- Exercice 2.4:**
- a) $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{26 \cdot 25 \cdot 24} = \frac{6840}{15600} \approx 43,85 \%$
 - b) $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{26 \cdot 25 \cdot 24} = \frac{120}{15600} \approx 0,7692 \%$
 - c) $\frac{1}{15600} \approx 0,0064 \%$
 - d) $\frac{6}{15600} \approx 0,0385 \%$

- Exercice 2.5:**
- a) $\frac{6}{16} = 37,5 \%$
 - b) $\frac{4}{16} + \frac{1}{16} = 31,25 \%$

- Exercice 2.6:**
- a) $\frac{210}{1680} = 12,5 \%$
 - b) $\frac{90}{1680} \approx 5,36 \%$
 - c) $\frac{360}{1680} \approx 21,43 \%$

- Exercice 2.7:**
- a) 18,18 %
 - b) 1,01 %

- Exercice 2.8:**
- a) 4,55 %
 - b) 27,27 %
 - c) 38,18 %
 - d) 61,82 %
 - e) 74,55 %
 - f) 76,36 %

- Exercice 2.9:**
- a) 22,22 %
 - b) 34,76 %
 - c) 65,24 %

- Exercice 2.10:**
- a) 9,31 %
 - b) 69,09 %
 - c) 30,91 %

- Exercice 2.11:**
- a) 0,033 %
 - b) 0,802 %
 - c) 0,067 %
 - d) 0,134 %
 - e) 0,008 %
 - f) 0,006 %
 - g) 53,42 %
 - h) 46,58 %
 - i) 91,57 %
 - j) 9,63 %

- Exercice 2.12:**
- a) 4,63 %
 - b) 9,26 %
 - c) 90,74 %

- Exercice 2.13:** 20,51 %

B.3 Probabilités en utilisant un diagramme de Venn

Exercice 2.14: a) 40 %

b) 70 %

Exercice 2.15: a) 86 %

b) 6 %

c) 4 %

Exercice 2.16: a) $1/2$

b) $3/13$

c) $8/13$

Exercice 2.17: a) 2300 possibilités

b) 9,57 %

c) 50,43 %

d) 36 %

e) 40 %

Exercice 2.18: a) $U = \{PP; PF; FP; FF\}$

$$b) P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$c) P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Exercice 2.19: a) $P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{7}{50} \quad \text{et} \quad P(C) = \frac{3}{25}$

$$b) P(\text{multiple de 7 ou multiple de 8}) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) \\ = \frac{7}{50} + \frac{3}{25} - 0 = \frac{13}{50}$$

$$c) P(\text{pair ou multiple de 7}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{1}{2} + \frac{7}{50} - \frac{3}{50} = \frac{29}{50}$$

$$d) P(\text{pair ou multiple de 8}) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \\ = \frac{1}{2} + \frac{3}{25} - \frac{3}{25} = \frac{1}{2}$$

B.4 Probabilités en utilisant un diagramme en arbre

Exercice 2.20: $\frac{35}{768}$

Exercice 2.21: a) 58 %

b) 49 %

c) 79 %

Exercice 2.22: a) 60 %

b) 40 %

Exercice 2.23: b) 2,16 %

c) 97,84 %

d) 25,68 %

Exercice 2.24: 56 %

Exercice 2.25: 98,35 %

Exercice 2.26: a) $\frac{1}{10}$

b) 5,90 %

c) 27,1 %

- Exercice 2.41:** a) $P(\text{all. et tennis}) = 33/150$ $P(\text{all.}) \cdot P(\text{tennis}) = 26/125$.
Ces événements ne sont donc pas indépendants.
- b) $P(\text{anglais et voile}) = 9/50$ $P(\text{anglais}) \cdot P(\text{voile}) = 9/50$.
Ces événements sont donc indépendants.

B.8 Un petit mélange

- Exercice 2.42:** a) $58\% = 48\% + 10\%$ (*somme de 2 branches*)
b) $28,57\%$
c) 80% (*correspond directement à la valeur sur une branche*)

Exercice 2.43: $21,67\%$

- Exercice 2.44:** a) $P(A) = 3/4$, $P(B) = 1/2$, $P(A \cap B) = 3/8$.
On a bien $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- b) $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/4$, $P(A \cap B) = 1/2$.
Ces événements sont donc dépendants.

- Exercice 2.45:** a) $8,33\%$ b) $91,67\%$

- Exercice 2.46:** a) $P(\text{as - as} \mid \text{as - roi ou as - as}) = \frac{P(\text{as - as})}{P(\text{as - roi ou as - as})}$

$$= \frac{C_2^4}{C_1^4 \cdot C_1^4 + C_2^4} \approx 27,27\%$$
- b) $P(\text{as - as} \mid \text{asr - autre ou asr - asr}) = \frac{P(\text{asr - asr ou asr - asn})}{P(\text{asr - autre ou asr - asr})}$

$$= \frac{C_2^2 + C_1^2 \cdot C_1^2}{C_1^2 \cdot C_1^6 + C_2^2} \approx 38,46\%$$
- c) $P(\text{as - as} \mid \text{asc - autre}) = \frac{P(\text{asc - as})}{P(\text{asc - autre})} = \frac{C_1^1 \cdot C_1^3}{C_1^1 \cdot C_1^7} \approx 42,86\%$

- Exercice 2.47:** a) $1,9\%$ b) $92,11\%$ c) entre 23 et 35 véhicules

- Exercice 2.48:** a) Avec **combinatoire** : $p = \frac{C_2^6 + C_2^n + C_2^{24-n}}{C_2^{30}} = \dots = \frac{n^2 - 24n + 291}{435}$

$$\begin{aligned} \text{Avec } \mathbf{arbre} : p &= \frac{6}{30} \cdot \frac{5}{29} + \frac{n}{30} \cdot \frac{n-1}{29} + \frac{24-n}{30} \cdot \frac{23-n}{29} \\ &= \frac{n^2 - 24n + 291}{435} \end{aligned}$$

- b) $n = 12$ pièces de 2 francs

- c) $n = 1$ ou $n = 23$ pièces de 2 francs.

Si vous avez obtenu $n = 0$ ou $n = 24$, je vous propose de relire attentivement la donnée...

Si vous souhaitez commander ou utiliser ce polycopié dans vos classes, merci de prendre contact avec son auteur en passant par son site web :

www.javmath.ch