CHAPITRE 7 (MP): ESPACES VECTORIELS NORMÉS

HEI 2 - 2014/2015 - A. RIDARD

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-ev avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Normes

1. Définitions et exemples

Définition (norme et evn)**.**

Une norme sur E est une application, généralement notée $\|.\|$, de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ (homogénéité)
2. $\forall (u, v) \in E^2,\ \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire)
3. $\forall u \in E,\ \|u\| \geq 0$ (positivité)
4. $\forall u \in E \setminus \{0_E\},\ \|u\| > 0$ (stricte positivité)

L'ev E muni d'une norme $\|.\|$ est un espace vectoriel normé (evn) noté $(E, \|.\|)$.

Remarques.
- Les normes sont parfois notées $N(.)$, elles servent à définir la longueur d'un vecteur.
- La stricte positivité est équivalente à : $\forall u \in E,\ \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0_E$.
- L'inégalité triangulaire entraîne l'inégalité triangulaire renversée :

$$\forall (u, v) \in E^2,\ \Big| \|u\| - \|v\| \Big| \leq \|u - v\|$$

Exemples (en dimension 1)**.**
La valeur absolue (resp. le module) est une norme sur le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathbb{R}$ (resp. sur le $\mathbb{C}$-ev $E = \mathbb{C}$)

Exemples (en dimension finie)**.**

1. Soit $E = \mathbb{K}^n$ et $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$.
   - $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$
   - $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$
   - $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$
2. Soit $E = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $A = (a_{ij}) \in E$.
   - $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|$
   - $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|^2}$
   - $\|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{ij}|$
3. (Cas général) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension l, $b = (e_1, \ldots, e_l)$ une base de E et $u = \sum_{k=1}^{l} u_k e_k \in E$.
   - $\|u\|_{1,b} = \sum_{k=1}^{l} |u_k|$
   - $\|u\|_{2,b} = \sqrt{\sum_{k=1}^{l} |u_k|^2}$
   - $\|u\|_{\infty,b} = \max_{1 \leq k \leq l} |u_k|$

Exemples (en dimension infinie)**.**
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $E=\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ l'ev des fonctions réelles continues sur $[a,b]$ et $f\in E$.
- $\|f\|_1=\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$
- $\|f\|_2=\sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\,dt}$
- $\|f\|_\infty=\max\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|$ (pourquoi le max est-il bien défini ?)

2. Normes équivalentes

Définition (normes équivalentes)**.**

On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que :

$$\forall u\in E,\ \alpha N_2(u)\le N_1(u)\le \beta N_2(u)$$

Exemples.

1. Dans $\mathbb{R}^n$, les trois normes définies précédemment sont équivalentes (exercice 1).
   En fait, dans un evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
2. Dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
   On pourra raisonner par l'absurde et considérer la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$f_n(t)=\begin{cases} nt & \text{si } t\in\left[0,\frac{1}{n}\right] \\ 2-nt & \text{si } t\in\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Dans la suite du cours, $(E,\|.\|)$ **désigne un evn.**

II. Fonctions sur un evn : limites et continuité

1. Boules ouvertes

Définition (boule ouverte)**.**

Soit $a\in E$ et $R>0$.
La boule ouverte de centre a et de rayon R, notée $B(a,R)$, est définie par :

$$B(a,R)=\{u\in E\,|\,\|u-a\|<R\}$$

Exemples. Représenter la boule unité (de centre 0 et de rayon 1) dans :

1. $(\mathbb{R},|.|)$
2. $(\mathbb{C},|.|)$
3. $(\mathbb{R}^2,\|.\|_2)$
4. $(\mathbb{R}^2,\|.\|_1)$
5. $(\mathbb{R}^2,\|.\|_\infty)$

Définition (point adhérent)**.**

Soit $a\in E$ et A une partie de E.
On dit que a est un point adhérent à A si toute boule ouverte de centre a contient au moins un point de A.

Remarques.
- Tout point de A est adhérent à A
- Cette propriété est dite topologique car elle reste vraie lorsque la norme de E est remplacée par une autre équivalente.

Exemples.

1. Points adhérents à $[0,1[$
2. Points adhérents à $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | (x-2)^2+(y-1)^2<1\}$
3. Points adhérents à $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

2. Limites et continuité

Soit $(E,\|.\|_E)$, $(F,\|.\|_F)$ deux evn, f une fonction de E dans F et A une partie (non vide) de l'ensemble de définition D_f.

Définition (limite)**.**

Soit a un point adhérent à A et l un point de F.
On dit que l est limite de f en a selon A si toute boule ouverte de centre l contient l'image par f d'une boule ouverte de centre a intersectée avec A autrement dit :

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall u\in A,\ \|u-a\|_E<\eta\Rightarrow\|f(u)-l\|_F<\epsilon$$

Dans ce cas, on note $l=\lim\limits_{\substack{u\to a\\ u\in A}} f(u)$
On dit que l est limite de f en a si elle l'est selon D_f.
Dans ce cas, on note simplement $l=\lim\limits_{u\to a} f(u)$

Remarques.
- Admettre une limite est une propriété topologique
- Lorsqu'elle existe, la limite est unique
- Les propriétés algébriques des limites (addition, multiplication par un scalaire, composition) connues pour les fonctions sur $\mathbb{R}$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $n\in\mathbb{N}$) sont encore vraies.

Méthode (pour montrer que f n'admet pas de limite en a)**.**
On remarque que $l=\lim\limits_{u\to a} f(u)\Leftrightarrow\left(\forall A\subset D_f,\ l=\lim\limits_{\substack{u\to a\\ u\in A}} f(u)\right)$.
Pour montrer que f n'admet pas de limite en a, il suffit donc de trouver deux "chemins" A et B tels que

$$\lim_{\substack{u\to a\\ u\in A}} f(u)\neq\lim_{\substack{u\to a\\ u\in B}} f(u)$$

Exemple (fonction réelle à une variable)**.**
Soit g la fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^-} g(x)=-1$ donc g n'admet pas de limite en 0.

Exemple (fonction réelle à deux variables)**.**
Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$.
On considère $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} | y=x\right\}$ et $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} | y=x^2\right\}$.
$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in A}} f(x,y)=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in B}} f(x,y)=0$ donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.
Plus simplement, on pourra écrire $\lim\limits_{x\to0} f(x,x)=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to0} f(x,x^2)=0$.

Définition (continuité en un point)**.**

Soit a un point de A.
On dit que f est continue en a selon A si $f(a)$ est la limite de f en a selon A.
On dit que f est continue en a si elle l'est selon D_f.

Définition (continuité sur une partie)**.**

On dit que f est continue sur A si elle l'est en tout point $a\in A$ selon A.
On dit que f est continue si elle l'est sur D_f.

Remarques.
- La continuité est une propriété topologique
- Les propriétés algébriques de la continuité (addition, multiplication par un scalaire, composition) connues pour les fonctions sur $\mathbb{R}$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$) sont encore vraies.

Exemples (suite des deux exemples précédents)**.**

1. La fonction g est continue sur $[0,1[$ mais pas en 0.
2. La fonction f avec $f(0,0) = 0$ n'est pas continue en $(0,0)$ mais elle l'est selon B.

III. Suites dans un evn

1. Définitions

Définition (suite)**.**

Une suite (u_n) de E est une application de $\mathbb{N}$ dans E.

Définition (suite convergente/divergente)**.**

Une suite (u_n) est convergente vers $l \in E$ si $\lim_{n\to+\infty} \|u_n - l\| = 0$ c'est à dire :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \|u_n - l\| < \epsilon$$

On note $u_n \to l$ pour $\|.\|$.
Une suite non convergente est dite divergente.

Remarque. La convergence est une propriété topologique

Exemples.

1. Soit (u_n) la suite de $E = \mathbb{R}^2$ définie par $u_n = \left(\frac{\sin n}{n}, \frac{n+1}{n}\right)$.
   Alors, $u_n \to (0,1)$ pour $\|.\|_1$ (et pour toutes les normes)
2. Soit (f_n) la suite de $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ définie par $f_n(t) = t^n$.
   Alors, $f_n \to 0_E$ pour $\|.\|_1$ mais $\|f_n\|_\infty = 1$ donc $f_n \nrightarrow 0_E$ pour $\|.\|_\infty$.

2. Propriétés

Beaucoup de théorèmes sur les suites numériques se généralisent : unicité de la limite quand elle existe, opérations algébriques, théorème de Bolzano-Weierstrass...

Propriété (une CN de convergence)**.**

Si une suite (u_n) est convergente, alors elle est bornée autrement dit :

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leq M$$

⚠ La réciproque est fausse mais on a :

Théorème (de Bolzano-Weierstrass)**.**

Si E est de dimension finie, de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

⚠ On ne peut évidemment pas généraliser les notions qui utilisent la relation d'ordre $\leq$: limite infinie, suites monotones, théorèmes de comparaison, suites adjacentes...

Propriété (convergence en dimension finie)**.**

Soit E un ev muni d'une base $b = (e_1, \ldots, e_l)$ et $\big(u(n)\big)$ une suite de E définie par $u(n) = \sum_{k=1}^{l} u_k(n) e_k$.

Alors, la suite vectorielle $\big(u(n)\big)$ converge si et seulement si ses suites coordonnées $\big(u_k(n)\big)$ convergent.

Dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty} u(n) = \sum_{k=1}^{l} \Big(\lim_{n\to+\infty} u_k(n)\Big) e_k$.

Exemples.

1. Soit (u_n) la suite de $E = \mathbb{R}^2$ définie par $u_n = \Big(n \sin\frac{1}{n}, \big(1+\frac{1}{n}\big)^n\Big)$.
   Alors, $u_n \to (1, e)$
2. Soit (A_n) et (B_n) deux suites de $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $A_n \to A$ et $B_n \to B$.
   Alors, $A_n B_n \to AB$

IV. Séries dans un evn

Dans cette section, (u_n) désigne une suite de E.

Définition (série et sommes partielles)**.**

La série de terme général u_n, notée $[u_n]$, est la suite des sommes partielles (S_n) où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Remarques.
- S_n est appelée la somme partielle d'ordre n de la série
- Si la suite (u_n) est définie à partir d'un certain rang n_0, les sommes partielles sont définies par $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ pour tout $n \geq n_0$

Propriété (ev des séries)**.**

L'ensemble des séries muni de l'addition interne, définie par $[u_n] + [v_n] = [u_n + v_n]$, et de la multiplication par un scalaire, définie par $\lambda[u_n] = [\lambda u_n]$, forme un $\mathbb{K}$-ev.

Définition (série convergente/divergente)**.**

Une série $[u_n]$ est dite convergente si la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente.
Une série non convergente est dite divergente.

Définition (somme et reste d'une série convergente)**.**

Soit $[u_n]$ une série convergente.
La limite de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelée somme de la série $[u_n]$ et notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
La somme de la série convergente $[u_n]_{n\geq p+1}$ $(p \in \mathbb{N})$ est appelée reste d'ordre p de la série $[u_n]$ et notée $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$
On a alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S = S_p + R_p$.

Propriété (linéarité de la somme)**.**

Soit $[u_n]$ et $[v_n]$ deux séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors, la série $[u_n + \lambda v_n]$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Remarques.
- Si $[u_n]$ converge et $[v_n]$ diverge, alors $[u_n + v_n]$ diverge
- Si $[u_n]$ et $[v_n]$ divergent, on ne peut rien dire a priori sur $[u_n + v_n]$

Définition (série absolument convergente)**.**

Une série $[u_n]$ est dite absolument convergente si la série des normes $[\| u_n \|]$ converge.

V. Méthodes pour étudier une série à termes dans un evn

1. Etudier la divergence grossière

Propriété (une CN de convergence)**.**

Si la série $[u_n]$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0.
Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, on dit que la série $[u_n]$ diverge grossièrement.

2. Etudier la suite des sommes partielles

Cette méthode permet de déterminer la somme en cas de convergence

3. Etudier la convergence absolue

Remarque. On se ramène ainsi à l'étude d'une série à termes réels positifs.

Propriété (une CS de convergence)**.**

Si l'evn est de dimension finie, une série qui converge absolument est convergente.

Définition (série semi-convergente)**.**

Une série $[u_n]$ est dite semi-convergente si elle est convergente mais non absolument convergente.