

DUT Informatique

Année universitaire 2020 / 2021



M1202 – Algèbre linéaire

Responsable : A. Ridard

Autres intervenants : R. Fleurquin et T. Godin



Avant-propos

Ce document est spécifiquement rédigé pour des séances de Cours/TD.

Il présente les éléments de cours habituels (définitions et propriétés) enrichis de remarques, indiquées par , donnant un certain éclairage pour mieux les comprendre, les retenir et les utiliser.

Ce cours est aussi ponctué d'exercices, indiqués par , qui seront traités en classe ou à la maison pour bien assimiler les différentes notions présentées. Grâce à ces exercices, vous allez fabriquer les exemples du cours ainsi que certaines preuves. C'est effectivement en étant acteur dans ses apprentissages que l'on profite au mieux des enseignements!

Vous trouverez également des méthodes mises en œuvre, indiquées par , qui correspondent à des savoirs-faire incontournables. D'autres méthodes, issues des propriétés, apparaissent en gras dans les remarques.

Ce document sera complété par des feuilles de TD ou TP pour s'entraîner d'avantage.

Les situations étudiées dans ce document et en TD sont plutôt issues de la géométrie. Elles constituent des modèles auxquels on peut se ramener par un travail de modélisation : transformation d'un problème concret (de la vraie vie) en un problème mathématique "type" que l'on sait résoudre. Les TP (Python), quant à eux, seront plutôt issus de l'Informatique (moteur de recherche, cryptographie, compression d'image, code correcteur d'erreur).

En fait, l'algèbre linéaire permet de traiter certains problèmes géométriquement, mais c'est aussi un excellent "terrain de jeu" pour illustrer les techniques de démonstrations présentées dans le module M1201. Vous verrez alors comment se bâtit une théorie mathématique.

Bonne lecture, et bon travail...

Table des matières

A	A propos des espaces vectoriels	7
I.	Espace vectoriel (ev)	7
1.	Introduction	7
2.	Définition et premières propriétés	8
3.	Ev de référence	9
4.	Sous espace vectoriel (sev)	9
5.	Sev engendré par des vecteurs	10
II.	Base	12
1.	Famille génératrice	12
2.	Famille libre	12
3.	Base	13
III.	Dimension	14
1.	Dimension finie	14
2.	Dimension	14
3.	Rang d'une famille de vecteurs	15
B	A propos des applications linéaires	17
I.	Application linéaire	17
II.	Image et noyau	19
1.	Image	19
2.	Noyau	20
3.	Théorème du rang	22
III.	Isomorphisme	22
1.	Surjection	22
2.	Injection	23
3.	Bijection	23
C	Point de vue matriciel en dimension finie	25
I.	Matrices en algèbre linéaire	25
1.	Matrice d'un vecteur	25
2.	Matrice d'une application linéaire	26
II.	Espace vectoriel des matrices	27
1.	Addition	27
2.	Multiplication par un réel	27
3.	A propos de l'ev des matrices	28
III.	Multiplication matricielle	28
1.	Pour déterminer l'image d'un vecteur	28
2.	Pour déterminer la matrice d'une composée	30
IV.	Inversion de matrices	31
1.	Matrice inversible	31
2.	Détermination pratique de l'inverse	33

Chapitre A

A propos des espaces vectoriels

Sommaire

I. Espace vectoriel (ev)	7
1. Introduction	7
2. Définition et premières propriétés	8
3. Ev de référence	9
4. Sous espace vectoriel (sev)	9
5. Sev engendré par des vecteurs	10
II. Base	12
1. Famille génératrice	12
2. Famille libre	12
3. Base	13
III. Dimension	14
1. Dimension finie	14
2. Dimension	14
3. Rang d'une famille de vecteurs	15

I. Espace vectoriel (ev)

1. Introduction

Vous savez des choses!

Plaçons nous dans le plan euclidien, et considérons deux vecteurs \vec{u} , \vec{v} et un réel α .

Vous savez :

- additionner deux vecteurs (le résultat $\vec{u} + \vec{v}$ est encore un vecteur)
- multiplier un vecteur par un réel (le résultat $\alpha \cdot \vec{u}$ est encore un vecteur)

Vous savez aussi que l'addition est une opération :

- associative : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ avec \vec{w} un troisième vecteur
- commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- avec un élément neutre : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- pour laquelle tout vecteur admet un symétrique : $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Vous savez enfin que la multiplication est une opération qui vérifie :

- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
- $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$ (distributivité)
- $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = (\alpha \beta) \cdot \vec{u}$ avec β un deuxième réel (pseudo-associativité^[1])
- $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$ (pseudo-distributivité^[2])

Vous savez en fait ce qu'est un espace vectoriel...

[1]. Pourquoi pseudo ?

[2]. Pourquoi pseudo ?

2. Définition et premières propriétés

Définition (\mathbb{R} -ev ou plus simplement ev).

Un ev est un ensemble E muni de deux opérations :

- une addition (interne) notée $+$: $E \times E \rightarrow E$
- une multiplication (externe) notée $.$: $E \times \mathbb{R} \rightarrow E$

L'addition (interne) doit être une opération :

- associative : $\forall u, v, w \in E, u + (v + w) = (u + v) + w$
- commutative : $\forall u, v \in E, u + v = v + u$
- avec un élément neutre noté 0_E ou 0 : $\forall u \in E, u + 0 = u$
- pour laquelle tout vecteur admet un symétrique : $\forall u \in E, u + (-u) = 0$

Et la multiplication (externe) doit vérifier :

- $\forall u \in E, 1.u = u$
- $\forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$
- $\forall u \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u$
- $\forall u \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$



- Un ev E n'admet qu'un seul élément neutre, appelé aussi vecteur nul, ce qui légitime la notation 0_E
- Dans un ev, un vecteur u n'admet qu'un seul symétrique, appelé aussi opposé, ce qui légitime la notation $-u$

Dorénavant, un vecteur désignera un élément d'un ev!

On ne mettra donc plus de flèches sur les vecteurs.



Ne pas confondre les vecteurs et les réels.

La lettre x pourra désigner, suivant le contexte, un vecteur si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ou un réel si $u = (x, y, z)$.

On notera la multiplication du vecteur u par le réel α , non plus $\alpha.u$, mais simplement αu .



Ne pas confondre les opérations sur les vecteurs et celles sur les réels

Propriété (simplification).

Soit E un ev et u, v, w des vecteurs de E .

Si $u + v = u + w$, alors $v = w$.



Démontrer cette propriété à l'aide de la définition d'un ev.

Propriété (multiplication externe).

Soit E un ev, u un vecteur de E et α un réel.

- $0u = 0_E$ ou plus simplement (à condition de maîtriser) $0u = 0$
- $\alpha 0_E = 0_E$ ou plus simplement $\alpha 0 = 0$
- $(-1)u = -u$



Démontrer cette propriété à l'aide de la définition d'un ev et de la propriété de simplification.

3. Ev de référence

Propriété (ev des n -uplets de réels - admise).

L'ensemble $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ muni des opérations définies par :

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
- $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

forme un ev dont le vecteur nul est le n -uplet $(0, \dots, 0)$.

Propriété (ev des suites réelles - admise).

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid u_0, \dots \in \mathbb{R}\}$ muni des opérations définies par :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- $\alpha(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

forme un ev dont le vecteur nul est la suite nulle.

Propriété (ev des fonctions réelles d'une variable réelle - admise).

L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni des opérations définies par :

- $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$
- $\alpha f : x \mapsto \alpha f(x)$

forme un ev dont le vecteur nul est la fonction nulle.

4. Sous espace vectoriel (sev)

Définition (sev).

Soit E un ev et F une partie de E .

On dit que F est un sev de E si :

- $F \neq \emptyset$
- F est stable par addition : $\forall u, v \in F, u + v \in F$
- F est stable par multiplication : $\forall u \in F, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha u \in F$



- Les deux derniers points sont équivalents à :

$$\forall u, v \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha u + \beta v \in F \quad (\text{stabilité par combinaison linéaire})$$

ou encore

$$\forall u, v \in F, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha u + v \in F \quad (\text{critère pratique})$$

- Si F est un sev de E , alors $0_E \in F$ (pourquoi?).
Ainsi, **pour savoir si F est un sev de E , on regarde d'abord si $0_E \in F$.**
Si non, ce n'est pas un sev de E ; si oui, on regarde la stabilité.
- F muni des restrictions^a de $+$ et \cdot est un ev.
Ainsi, **pour montrer qu'un ensemble est un ev, il suffit de montrer que c'est un sev d'un ev de référence.**

a. Il s'agit de restreindre les ensembles de départ : $+_F : F \times F \rightarrow E$ et $\cdot_F : F \times \mathbb{R} \rightarrow E$

Voici alors trois nouveaux ev de référence :

Propriété (ev des applications réelles d'une variable réelle - évidente).

L'ensemble des applications réelles d'une variable réelle,

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid D_f = \mathbb{R}\}$$

est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc un ev.

Propriété (ev des polynômes - évidente).

L'ensemble des polynômes (à coefficients réels),

$$\mathbb{R}[X] = \{P \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid P \text{ soit polynomiale}\}$$

est un sev de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc un ev.



L'application P est dite polynomiale si elle est de la forme

$$P : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

où a_0, \dots, a_n sont des réels avec $a_n \neq 0$.

On dira alors que P est un polynôme de degré n .

En notant X^k le monôme de degré k c'est à dire $X^k : x \mapsto x^k$, on a donc :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$$

Propriété (ev des polynômes de degré inférieur ou égal à n - évidente).

L'ensemble des polynômes (à coefficients réels) de degré inférieur ou égal à n ,

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$$

est un sev de $\mathbb{R}[X]$ et donc un ev.



Montrer que les ensembles suivants sont des sev :

- Les triplets de \mathbb{R}^3 dont la première composante est nulle
- Les suites réelles convergentes
- Les applications réelles continues sur \mathbb{R}
- Les polynômes qui s'annulent en 1



Montrer que les ensembles suivants ne sont pas des sev :

- Les couples de \mathbb{R}^2 dont la deuxième composante est la valeur absolue de la première
- Les suites réelles majorées
- Les applications réelles positives^a sur \mathbb{R}
- Les polynômes de degré 2

^a. En Mathématiques, positif signifie positif ou nul

5. Sev engendré par des vecteurs

Dans \mathbb{R}^2 , si F est un sev contenant $(1, 0)$, alors il contient aussi tous les vecteurs de la forme $\alpha(1, 0)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, autrement dit $\{\alpha(1, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset F$.

En fait, $\{\alpha(1, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ est le plus petit^[3] sev contenant $(1, 0)$.

On dira que c'est :

- l'ensemble des vecteurs colinéaires à $(1, 0)$
- le sev engendré par $(1, 0)$, noté $\text{Vect}((1, 0))$
- la droite vectorielle engendrée par $(1, 0)$

[3]. Au sens de l'inclusion

De la même manière, on a :

Dans \mathbb{R}^3 , si F est un sev contenant $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$, alors il contient aussi tous les vecteurs de la forme $\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, autrement dit $\{\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset F$.

En fait, $\{\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ est le plus petit sev contenant $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$.

On dira que c'est :

- l'ensemble des combinaisons linéaires de $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$
- le sev engendré par $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$, noté $Vect((1,0,0), (0,1,0))$
- le plan vectoriel engendré par $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$

Définition (combinaison linéaire de vecteurs).

Soit E un ev et u_1, \dots, u_n des vecteurs de E .

Une combinaison linéaire de u_1, \dots, u_n est un vecteur de la forme

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

où les α_i sont les coefficients (réels) de la combinaison linéaire.

Définition (sev engendré par des vecteurs).

Soit E un ev et u_1, \dots, u_n des vecteurs de E .

On appelle sev engendré par u_1, \dots, u_n , noté $Vect(u_1, \dots, u_n)$, l'ensemble des combinaisons linéaires de u_1, \dots, u_n :

$$Vect(u_1, \dots, u_n) = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n | \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$



- C'est bien un sev de E , et même le plus petit contenant u_1, \dots, u_n
- **Pour montrer que $Vect(u_1, \dots, u_n)$ est inclus dans un sev F de E , il suffit alors de montrer que $u_1, \dots, u_n \in F$**

Définition (droite vectorielle, plan vectoriel).

Soit E un ev et u, v des vecteurs de E avec $u \neq 0_E$.

- $Vect(u)$ est appelé droite vectorielle engendrée par u . C'est l'ensemble des vecteurs dits colinéaires à u
- Si v n'est pas colinéaire à u c'est à dire $v \notin Vect(u)$, alors $Vect(u, v)$ est appelé plan vectoriel engendré par u et v

Dans \mathbb{R}^2

On considère $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by = 0\}$ avec $b \neq 0$.

Montrer que D est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(-b, a)$.

Dans \mathbb{R}^3

On considère $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz = 0\}$ avec $c \neq 0$.

Montrer que P est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $(-c, 0, a)$ et $(0, -c, b)$.

Dans \mathbb{R}^3

On considère D l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$\begin{cases} ax + by + cz & = & 0 \\ a'x + b'y + c'z & = & 0 \end{cases}$$

1. Si $(a, b, c) = (1, 1, 2)$ et $(a', b', c') = (1, 2, 1)$, montrer que $D = Vect((-3, 1, 1))$
2. Si $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ et $(a', b', c') = (1, 2, 2)$, montrer que $D = Vect((0, -1, 1))$

II. Base

Dans toute la suite, E désigne un ev et u_1, \dots, u_n des vecteurs de E .

1. Famille génératrice



A-t-on toujours :

- $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \subset E$?
- $E \subset \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$?

Définition (famille génératrice d'un ev).

On dit que (u_1, \dots, u_n) est une famille génératrice de E si $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ ce qui équivaut à dire que tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de u_1, \dots, u_n .



(u_1, \dots, u_n) est évidemment une famille génératrice de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$

Propriété (principe de réduction d'une famille génératrice).

Si (u_1, \dots, u_n) est une famille génératrice de E et si $u_n \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$, alors la sous-famille (u_1, \dots, u_{n-1}) est génératrice de E .



Démontrer cette propriété.



1. Montrer que la famille $((1, 0), (0, 1), (1, 1))$ est génératrice de \mathbb{R}^2 .
2. L'écriture en combinaison linéaire de $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ est-elle unique?
3. A l'aide du principe de réduction, montrer que la sous-famille $((1, 0), (1, 1))$ est génératrice de \mathbb{R}^2 .
4. L'écriture en combinaison linéaire de $(1, 0), (1, 1)$ est-elle unique?

2. Famille libre

Définition (vecteurs linéairement indépendants).

On dit que u_1, \dots, u_n sont linéairement indépendants si :

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0_E) \Rightarrow (\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0)$$

Dans le cas contraire ^a, les vecteurs sont dits linéairement dépendants.

a. Savez-vous l'exprimer?



Cela signifie que la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire triviale (tous les coefficients nuls).

Dans \mathbb{R}^2

- Montrer que les vecteurs $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ sont linéairement dépendants.
- Montrer que les vecteurs $(1, 0)$, $(1, 1)$ sont linéairement indépendants.

Définition (famille libre).

On dit que (u_1, \dots, u_n) est une famille libre si les vecteurs u_1, \dots, u_n sont linéairement indépendants. Dans le cas contraire, la famille est dite liée.

Propriété (principe d'extension d'une famille libre).

Si (u_1, \dots, u_n) est une famille libre et si $u \in E$ n'appartient pas à $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, alors la sur-famille (u_1, \dots, u_n, u) est libre.



Démontrer cette propriété.

Propriété (unicité de l'écriture).

Si (u_1, \dots, u_n) est une famille libre, alors tout vecteur de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de u_1, \dots, u_n .



Démontrer cette propriété.



Tout vecteur de E s'écrit-il de manière unique comme combinaison linéaire de u_1, \dots, u_n ?

3. Base

Définition (base).

On dit que (u_1, \dots, u_n) est une base de E si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de u_1, \dots, u_n :

$$\forall u \in E, \exists ! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

Dans ce cas, les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont appelés les coordonnées du vecteur u dans la base (u_1, \dots, u_n) .

Propriété (CNS pour être une base - évidente).

(u_1, \dots, u_n) est une base de E si et seulement si c'est une famille libre et génératrice de E .



Une base est dite canonique si elle est naturelle d'après la manière dont l'espace vectoriel est présenté :

- $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$ est la base canonique de \mathbb{R}^n
- $(1, X, \dots, X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

III. Dimension

1. Dimension finie

Définition (ev de dimension finie).

Un ev est dit de dimension finie s'il possède (au moins) une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, il est dit de dimension infinie.



Les ev suivants sont-ils de dimension finie ou infinie?

- \mathbb{R}^n
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- $\mathbb{R}[X]$
- $\mathbb{R}_n[X]$

Propriété (existence d'une base en dimension finie - admise).

Un ev de dimension finie possède (au moins) une base.

Propriété (famille libre et famille génératrice en dimension finie - admise).

Dans un ev de dimension finie, une famille libre ne peut pas avoir plus de vecteurs qu'une famille génératrice.

Corollaire.

Dans un ev de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs.



I Démontrer ce corollaire.

2. Dimension

Définition (dimension d'un ev).

Soit E un ev de dimension finie.
Le nombre de vecteurs dans une base de E est appelé dimension de E et noté $\dim(E)$.



Déterminer les dimensions suivantes.

- $\dim(\mathbb{R}^n)$
- $\dim(\mathbb{R}_n[X])$

Propriété (famille libre et famille génératrice en dimension finie connue).

Dans un ev de dimension n ,

- une famille libre a au plus n vecteurs.
Si elle en a n , c'est une base.
- une famille génératrice a au moins n vecteurs.
Si elle en a n , c'est une base.



Démontrer cette propriété.



En dimension finie connue, **pour montrer qu'une famille avec le bon nombre de vecteurs est une base, on peut soit montrer qu'elle est libre, soit montrer qu'elle est génératrice.**

Propriété (complétion - admise).

Soit E un ev de dimension finie, \mathcal{L} une famille libre et \mathcal{G} une famille génératrice de E .
On peut alors former une base de E en complétant \mathcal{L} par des vecteurs bien choisis dans \mathcal{G} .

Corollaire (évident en utilisant, pour le deuxième point, le fait que la famille vide est libre par convention).

Dans un ev de dimension finie,

- une famille libre peut être complétée en une base
- d'une famille génératrice, on peut extraire une base

Propriété (dimension d'un sev - admise).

Soit E un ev de dimension finie et F un sev de E .

- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$
- Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$



En dimension finie, **pour montrer une égalité entre deux ev, on peut montrer une inclusion et l'égalité des dimensions, plutôt que la double inclusion.**

3. Rang d'une famille de vecteurs

Définition (rang d'une famille de vecteurs).

Le rang de la famille (u_1, \dots, u_n) est la dimension de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.



Si on dispose des coordonnées de u_1, \dots, u_n dans une base, **la méthode du pivot de Gauss permet de déterminer une base de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ et donc sa dimension.**

Cette méthode repose sur les remarques suivantes :

- permuter les vecteurs ne change pas le sev engendré
- multiplier un des vecteurs par un réel non nul ne change pas le sev engendré
- remplacer un des vecteurs par la somme de ce vecteur et d'une combinaison linéaire des autres ne change pas le sev engendré
- une famille "échelonnée" de vecteurs est libre



Présentons cette méthode à l'aide d'un exemple : dans \mathbb{R}^4 , déterminer une base de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ avec :

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, -1, -2) \\ u_2 &= (1, -1, -1, 2) \\ u_3 &= (2, 2, 4, -2) \\ u_4 &= (1, -1, -4, 1) \end{aligned}$$

On choisit un pivot sur la première ligne (valeur non nulle) :

C_1	C_2	C_3	C_4	Suivi des variables
1	1	2	1	$C_1 = u_1$
1	-1	2	-1	$C_2 = u_2$
-1	-1	4	-4	$C_3 = u_3$
-2	2	-2	1	$C_4 = u_4$

On fait apparaître des zéros sur la première ligne à droite du pivot :

	$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$	$C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$	$C_4 \leftarrow C_4 - C_1$	Suivi des variables
1	0	0	0	$C_1 = u_1$
1	-2	0	-2	$C_2 = u_2 - u_1$
-1	0	6	-3	$C_3 = u_3 - 2u_1$
-2	4	2	3	$C_4 = u_4 - u_1$

On choisit ensuite un pivot sur la deuxième ligne :

C_1	C_2	C_3	C_4	Suivi des variables
1	0	0	0	$C_1 = u_1$
1	-2	0	-2	$C_2 = u_2 - u_1$
-1	0	6	-3	$C_3 = u_3 - 2u_1$
-2	4	2	3	$C_4 = u_4 - u_1$

On fait apparaître des zéros sur la deuxième ligne à droite du pivot :

			$C_4 \leftarrow C_4 - C_2$	Suivi des variables
1	0	0	0	$C_1 = u_1$
1	-2	0	0	$C_2 = u_2 - u_1$
-1	0	6	-3	$C_3 = u_3 - 2u_1$
-2	4	2	-1	$C_4 = u_4 - u_2$

On choisit enfin un pivot sur la troisième ligne :

C_1	C_2	C_3	C_4	Suivi des variables
1	0	0	0	$C_1 = u_1$
1	-2	0	0	$C_2 = u_2 - u_1$
-1	0	6	-3	$C_3 = u_3 - 2u_1$
-2	4	2	-1	$C_4 = u_4 - u_2$

On fait apparaître des zéros sur la troisième ligne à droite du pivot :

			$C_4 \leftarrow 2C_4 + C_3$	Suivi des variables
1	0	0	0	$C_1 = u_1$
1	-2	0	0	$C_2 = u_2 - u_1$
-1	0	6	0	$C_3 = u_3 - 2u_1$
-2	4	2	0	$C_4 = 2u_4 - 2u_2 + u_3 - 2u_1$

On pose $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 - u_1$, $v_3 = u_3 - 2u_1$ et $v_4 = 2u_4 - 2u_2 + u_3 - 2u_1$.

Les opérations réalisées sur les colonnes nous assure que :

$$\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

De plus, $v_4 = 0$ donc on a :

$$\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$$

Autrement dit, la famille (v_1, v_2, v_3) est génératrice de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

En outre, la famille (v_1, v_2, v_3) est "échelonnée" donc libre (pourquoi?).

Par conséquent, (v_1, v_2, v_3) est une base de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ qui est alors de dimension 3.

Chapitre B

A propos des applications linéaires

Sommaire

I. Application linéaire	17
II. Image et noyau	19
1. Image	19
2. Noyau	20
3. Théorème du rang	22
III. Isomorphisme	22
1. Surjection	22
2. Injection	23
3. Bijection	23

I. Application linéaire

Définition (application linéaire ou morphisme d'ev).

Soit E, F deux ev et $f : E \rightarrow F$ une application.

On dit que l'application f est linéaire si :

- f respecte l'addition : $\forall u, v \in E, f(u + v) = f(u) + f(v)$
- f respecte la multiplication : $\forall u \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha u) = \alpha f(u)$



- Les deux derniers points sont équivalents à :

$$\forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \quad (f \text{ respecte la combinaison linéaire})$$

ou encore

$$\forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v) \quad (\text{critère pratique})$$

- $f(0_E) = 0_F$
- L'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images
- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un ev noté $\mathcal{L}(E, F)$
- La composée de deux applications linéaires est une application linéaire
- Lorsque $E = F$, on dit que f est un endomorphisme de E
- Lorsque $F = \mathbb{R}$, on dit que f est une forme linéaire de E
- Lorsque $F = \mathbb{R}^p$, la i -ième fonction coordonnée de f est définie par :

$$\begin{aligned} f_i : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \text{la } i\text{-ième composante de } f(u) \end{aligned}$$

L'application f est alors linéaire si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées le sont.

Propriété (les formes linéaires de \mathbb{R}^n).

Les formes linéaires de \mathbb{R}^n sont les applications définies par :

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} && \text{avec } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n \end{aligned}$$

 **Des transformations du plan bien connues**

- Montrer qu'une homothétie définie par :

$$\begin{aligned} h: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \lambda(x, y) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est un endomorphisme de \mathbb{R}^2

- Montrer que la projection orthogonale sur $\text{Vect}((1, 0))$ définie par :

$$\begin{aligned} p: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

est un endomorphisme de \mathbb{R}^2

- Montrer que la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}((1, 0))$ définie par :

$$\begin{aligned} s: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, -y) \end{aligned}$$

est un endomorphisme de \mathbb{R}^2

 **Des transformations de fonction bien connues**

- Montrer que l'application dérivée définie par :

$$\begin{aligned} D: \quad \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

est une application linéaire de l'ev $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur \mathbb{R} dans l'ev $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- Montrer que l'application intégrale définie par :

$$\begin{aligned} I: \quad \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

est une forme linéaire de l'ev $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[a, b]$

Propriété (définition d'une application linéaire connaissant une base au départ).

Soit E, F des ev et (e_1, \dots, e_n) une base de E .

Pour définir une application linéaire f de E dans F , il suffit de connaître les images des vecteurs de la base de E c'est à dire $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

 | Démontrer cette propriété.

- La forme linéaire φ de \mathbb{R}^3 définie par :

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto ax + by + cz \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est entièrement déterminée par ...

- La projection orthogonale p sur $\text{Vect}((1,0))$ définie par :

$$p: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x, 0) \end{array}$$

est entièrement déterminée par ...

II. Image et noyau

Dans la suite, E, F désignent des ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Image

Définition (image d'une application linéaire).

L'image de f , notée $\text{Im}(f)$, est l'ensemble des images des vecteurs de E :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{v \in F \mid \exists u \in E, v = f(u)\} \\ &= \{f(u) \mid u \in E\} \end{aligned}$$



! C'est un sev de F (savez-vous le montrer?)



- L'image de la projection orthogonale sur $\text{Vect}((1,0))$ est ...
- L'image de la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}((1,0))$ est ...
- L'image d'une forme linéaire non nulle est ...
- L'image de l'application dérivée est ...

Propriété (image d'une application linéaire connaissant une base au départ).

Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$



! Démontrer cette propriété.



Pour déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et sa dimension, on peut appliquer la méthode du pivot de Gauss à la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$, à condition évidemment que F soit de dimension finie



Soit f l'application linéaire définie par :

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) \longmapsto (x - y + z, 2x + 2y + 6z + 4t, -x - 2z - t) \end{array}$$

On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de \mathbb{R}^4 et

$$u_1 = f(e_1), u_2 = f(e_2), u_3 = f(e_3), u_4 = f(e_4)$$

La dimension de $Im(f)$ étant le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) , on applique la méthode du pivot de Gauss à :

C_1	C_2	C_3	C_4	Suivi des variables
1	-1	1	0	$C_1 = u_1$
2	2	6	4	$C_2 = u_2$
-1	0	-2	-1	$C_3 = u_3$
				$C_4 = u_4$

Au final, on obtient :

C_1	C_2	C_3	C_4	Suivi des variables
1	0	0	0	$C_1 = u_1$
2	4	0	0	$C_2 = u_2 + u_1$
-1	-1	0	0	$C_3 = u_3 - u_2 - 2u_1$
				$C_4 = u_4 - u_2 - u_1$

En posant $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 + u_1$, $v_3 = u_3 - u_2 - 2u_1$ et $v_4 = u_4 - u_2 - u_1$, il apparaît que (v_1, v_2) est une base de $Im(f)$ qui est alors de dimension 2.

Définition (rang d'une application linéaire).

La dimension de $Im(f)$ est appelée le rang de f , noté $rg(f)$.

2. Noyau

Définition (noyau d'une application linéaire).

Le noyau de f , notée $Ker(f)$, est l'ensemble des antécédents de 0_F :

$$Ker(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$$



! C'est un sev de E (savez-vous le montrer?)



- Le noyau de la projection orthogonale sur $Vect((1,0))$ est ...
- Le noyau de la symétrie orthogonale par rapport à $Vect((1,0))$ est ...
- Le noyau de l'application dérivée est ...
- Le noyau de la forme linéaire de \mathbb{R}^2 définie par :

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto ax + by \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est la droite (vectorielle) d'équation : ...

- Le noyau de la forme linéaire de \mathbb{R}^3 définie par :

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto ax + by + cz \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est le plan (vectoriel) d'équation : ...

- Le noyau de la forme linéaire de \mathbb{R}^n définie par :

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \quad \text{avec } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est l'hyperplan (vectoriel) d'équation : ...



Soit f l'application linéaire définie par :

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) \longmapsto (x - y + z, 2x + 2y + 6z + 4t, -x - 2z - t) \end{array}$$

Déterminer le noyau de f , c'est résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 2y + 6z + 4t = 0 \\ -x - 2z - t = 0 \end{cases}$$

Pour cela, on applique la méthode du pivot de Gauss sur les lignes.

Cette méthode repose sur les remarques suivantes :

- permuter les équations ne change pas les solutions
- multiplier une des éq. par un réel non nul ne change pas les solutions
- remplacer une éq. par la somme de cette éq. et d'une combinaison linéaire des autres ne change pas les solutions
- un système "échelonné" est facile à résoudre "en remontant"

On choisit un pivot sur la première ligne (terme non nul) :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 & L_1 \\ 2x + 2y + 6z + 4t = 0 & L_2 \\ -x - 2z - t = 0 & L_3 \end{cases}$$

On supprime les termes en dessous du pivot :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4y + 4z + 4t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -y - z - t = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

On choisit ensuite un pivot sur la deuxième ligne :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 & L_1 \\ 4y + 4z + 4t = 0 & L_2 \\ -y - z - t = 0 & L_3 \end{cases}$$

On supprime les termes en dessous du pivot :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4y + 4z + 4t = 0 \\ 0z + 0t = 0 & L_3 \leftarrow 4L_3 + L_2 \end{cases}$$

Le dernier système est bien "échelonné" :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4y + 4z + 4t = 0 \\ 0z + 0t = 0 \end{cases}$$

On le résout alors "en remontant" :

La dernière équation étant vraie pour tout $z, t \in \mathbb{R}$, les solutions (x, y, z, t) s'exprimeront en fonction de z et t .

Plus précisément, on a :

- $y = -z - t$
- $x = y - z = -2z - t$

Conclusion :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{(-2z - t, -z - t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-2, -1, 1, 0) + t(-1, -1, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((-2, -1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Remarque : on verra ci-dessous que la **méthode du pivot de Gauss sur les colonnes**, utilisée pour déterminer une base et la dimension de $\text{Im}(f)$, **permet aussi de déterminer la dimension et une base de $\text{Ker}(f)$** .

Ceci étant, savoir résoudre un système linéaire est indispensable en algèbre linéaire!

3. Théorème du rang

Propriété (Théorème du rang - admise).

Si E est de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$



Un hyperplan (vectoriel) de \mathbb{R}^n d'équation $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ est de dimension ...



Soit f l'application linéaire définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x - y + z, 2x + 2y + 6z + 4t, -x - 2z - t) \end{array}$$

En gardant les notations précédentes, la **méthode de Gauss** fournit :

$$(v_1, v_2) \text{ base de } \text{Im}(f) \text{ et donc } \dim(\text{Im}(f)) = 2$$

Le théorème du rang nous assure alors que $\dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2$.

De plus, la méthode de Gauss fournit aussi :

- $0 = v_3 = u_3 - u_2 - 2u_1 = f(e_3) - f(e_2) - 2f(e_1) = f(e_3 - e_2 - 2e_1)$
- $0 = v_4 = u_4 - u_2 - u_1 = f(e_4) - f(e_2) - f(e_1) = f(e_4 - e_2 - e_1)$

Autrement dit :

- $e_3 - e_2 - 2e_1 = (-2, -1, 1, 0) \in \text{Ker}(f)$
- $e_4 - e_2 - e_1 = (-1, -1, 0, 1) \in \text{Ker}(f)$

Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre de $\text{Ker}(f)$ qui est de dimension 2. En fait, ils forment une base de $\text{Ker}(f)$.

III. Isomorphisme

1. Surjection

Propriété (CNS de surjectivité - évidente).

f surjective $\iff \text{Im}(f) = F$.



Si F est de dimension finie, alors on a : f surjective $\iff \text{rg}(f) = \dim(F)$

Propriété (image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective).

Si f est surjective et si la famille (e_1, \dots, e_n) est génératrice de E , alors la famille des images $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F .



Démontrer cette propriété.



Si f est surjective et E de dimension finie, alors F l'est aussi et $\dim(E) \geq \dim(F)$

2. Injection

Propriété (CNS d'injectivité).

f injective $\iff \text{Ker}(f) = \{0_E\}$.



Démontrer cette propriété.



Pour montrer que f est injective, il suffit donc de montrer que 0_F admet un unique antécédent qui est 0_E .

En général, pour montrer qu'une application est injective, il faut montrer que toute image admet un unique antécédent!

Propriété (image d'une famille libre par une application linéaire injective).

Si f est injective et si la famille (e_1, \dots, e_n) est libre, alors la famille des images $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est aussi libre.



Démontrer cette propriété.



Si f est injective et F de dimension finie, alors E l'est aussi et $\dim(E) \leq \dim(F)$

3. Bijection

Définition (isomorphisme).

Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.
Dans ce cas, les ev de départ et d'arrivée sont dits isomorphes ^a.

^a. Ils possèdent alors les mêmes propriétés relatives à la structure d'ev



Un endomorphisme bijectif est appelé un automorphisme

Propriété (linéarité de la bijection réciproque).

Si f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.



I Démontrer cette propriété.

Propriété (image d'une base par un isomorphisme - évidente).

Si f est bijective et si la famille (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors la famille des images $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F .



Pour qu'une application linéaire entre deux ev de dimension finie soit bijective, il faut qu'ils aient la même dimension. Cette condition n'est pas suffisante^a, mais lorsqu'elle est remplie, on dispose d'une caractérisation « efficace » de la bijectivité.

a. Savez-vous le prouver?

Propriété (caractérisation « efficace » d'un isomorphisme).

Si $\dim(E) = \dim(F) < +\infty$, alors on a : f bijective $\iff f$ injective $\iff f$ surjective



I Démontrer cette propriété.



I Deux ev de même dimension (finie) sont isomorphes autrement dit il existe un isomorphisme entre les deux.



I Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ et \mathbb{R}^3 sont isomorphes en construisant un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ vers \mathbb{R}^3 .

Chapitre C

Point de vue matriciel en dimension finie

Sommaire

I. Matrices en algèbre linéaire	25
1. Matrice d'un vecteur	25
2. Matrice d'une application linéaire	26
II. Espace vectoriel des matrices	27
1. Addition	27
2. Multiplication par un réel	27
3. A propos de l'ev des matrices	28
III. Multiplication matricielle	28
1. Pour déterminer l'image d'un vecteur	28
2. Pour déterminer la matrice d'une composée	30
IV. Inversion de matrices	31
1. Matrice inversible	31
2. Détermination pratique de l'inverse	33

I. Matrices en algèbre linéaire

On considère deux ev E et F munis respectivement des bases :

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \text{ et } \mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$$

1. Matrice d'un vecteur

Nous savons qu'un vecteur $u \in E$ est déterminé de manière unique par ses coordonnées $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans la base \mathcal{B} :

$$u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

Définition (matrice d'un vecteur).

On appelle matrice du vecteur u dans la base \mathcal{B} , notée $\mathcal{M}(u, \mathcal{B})$, la matrice "colonne" formée des coordonnées de u dans \mathcal{B} :

$$\mathcal{M}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$



| Cette matrice dépend évidemment de la base choisie



| On notera simplement $\mathcal{M}(u)$ s'il s'agit de la base canonique ou s'il n'y a pas d'ambiguïté concernant la base

2. Matrice d'une application linéaire

Nous savons également qu'une application linéaire f de E dans F est entièrement déterminée par les images $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

De plus, les vecteurs $f(e_i) \in F$ sont déterminés de manière unique par leurs coordonnées $\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{pi}$ dans la base \mathcal{B}' .

Définition (matrice d'une application linéaire).

On appelle matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, notée $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, la matrice formée, en colonnes, des coordonnées de $f(e_1), \dots, f(e_n)$ dans \mathcal{B}' :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pn} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$$



| Cette matrice dépend évidemment des bases choisies



| On notera simplement $\mathcal{M}(f)$ s'il s'agit des bases canoniques ou s'il n'y a pas d'ambiguïté concernant les bases



- Soit f l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\longmapsto (x - y + z, 2x + 2y + 6z + 4t, -x - 2z - t) \end{aligned}$$

Sa matrice est $\mathcal{M}(f) = \dots$

- Soit φ la forme linéaire de \mathbb{R}^3 définie par :

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x + 2y - z \end{aligned}$$

Sa matrice "ligne" est $\mathcal{M}(\varphi) = \dots$

- Soit p la projection orthogonale sur $\text{Vect}((1, 0))$ définie par :

$$\begin{aligned} p: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Sa matrice est $\mathcal{M}(p) = \dots$

- Soit s la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}((1, 0))$ définie par :

$$\begin{aligned} s: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, -y) \end{aligned}$$

Sa matrice est $\mathcal{M}(s) = \dots$

- Soit h l'homothétie définie par :

$$\begin{aligned} h: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \lambda(x, y) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sa matrice est $\mathcal{M}(h) = \dots$



| Si $\lambda = 1$, l'homothétie est en fait l'application identité, et sa matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est appelée matrice identité d'ordre 2.

II. Espace vectoriel des matrices

1. Addition

On sait additionner deux applications linéaires f, g de E dans F :

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$$

On aimerait additionner leurs matrices de sorte que :

$$\mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g) = \mathcal{M}(f + g)$$



Les bases choisies doivent être les mêmes pour f et g

En fait, il suffit d'additionner les matrices terme à terme...

Définition (addition de matrices).

L'addition de deux matrices de même taille^a $p \times n$ est définie par :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} + b_{p1} & \dots & a_{pn} + b_{pn} \end{pmatrix}$$

a. Elles doivent avoir le même nombre de lignes p et le même nombre de colonnes n

2. Multiplication par un réel

On sait aussi multiplier par $\lambda \in \mathbb{R}$ une application linéaire f de E dans F :

$$\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$$

On aimerait aussi multiplier par $\lambda \in \mathbb{R}$ sa matrice de sorte que :

$$\lambda \mathcal{M}(f) = \mathcal{M}(\lambda f)$$

En fait, il suffit de multiplier par λ chaque coefficient de la matrice...

Définition (multiplication par un réel).

La multiplication par $\lambda \in \mathbb{R}$ d'une matrice de taille $p \times n$ est définie par :

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{p1} & \dots & \lambda a_{pn} \end{pmatrix}$$



Soit p la projection orthogonale sur $\text{Vect}((1, 0))$ définie par :

$$p : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x, 0) \end{array}$$

1. Déterminer la matrice de $2p - id$ où id désigne l'application identité.
2. En déduire que $2p - id = s$ où s désigne la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}((1, 0))$
3. Illustrer ce résultat à l'aide d'un dessin.

3. A propos de l'ev des matrices

Propriété (admise).

- L'ensemble des matrices de taille $p \times n$, noté $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, est un ev.
- Les matrices E_{ij} ($1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n$), où tous les coefficients sont nuls sauf e_{ij} qui vaut 1, forment la base canonique de l'ev $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ qui est donc de dimension pn .
- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ via l'isomorphisme défini par :

$$\begin{aligned} \phi: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) &\longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \mathcal{M}(f) \end{aligned}$$



- L'ensemble des matrices "carrées" de taille $n \times n$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De telles matrices sont dites d'ordre n .
- La base canonique de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ϕ est une application linéaire par définition des opérations sur les matrices!
- ϕ est bijective car, étant donnée une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, il existe une unique application linéaire f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p dont la matrice (dans les bases canoniques) est A . Plus précisément, cette unique **application linéaire associée à A** , est définie par :

$$f((1, 0, \dots, 0)) = (a_{11}, \dots, a_{p1}), \dots, f((0, \dots, 0, 1)) = (a_{1n}, \dots, a_{pn})$$

⚠ Un vecteur de \mathbb{R}^p se note toujours en ligne, c'est sa matrice qui est en colonne (évitons les abus).

- En fait, cet isomorphisme "naturel" permet de transformer un problème d'algèbre linéaire (de dimension finie) en un problème matriciel dont la résolution est plus pratique ^a!

^a. On peut par exemple utiliser la structure de tableaux dans les implémentations



On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'application linéaire associée f .
2. De quelle transformation du plan s'agit-il (faire un dessin)?
3. Déterminer la matrice de la rotation (vectorielle) d'angle θ (faire un dessin).

Se posent alors les questions suivantes :

- Comment déterminer matriciellement l'image d'un vecteur par une application linéaire?
- Comment déterminer la matrice de la composée de deux applications linéaires?

III. Multiplication matricielle

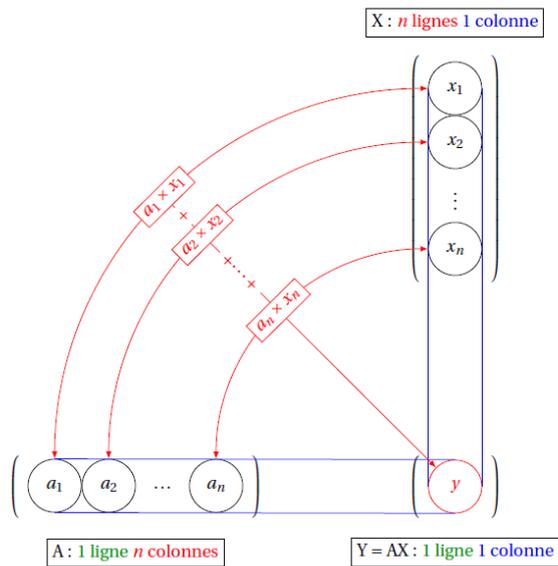
1. Pour déterminer l'image d'un vecteur

Soit φ la forme linéaire de \mathbb{R}^n définie par :

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \quad \text{avec } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sa matrice "ligne" est $\mathcal{M}(\varphi) = (a_1 \quad \dots \quad a_n)$.

Comment déterminer $\varphi(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ à partir des matrices $\mathcal{M}(\varphi) = (a_1 \quad \dots \quad a_n)$ et $\mathcal{M}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$?

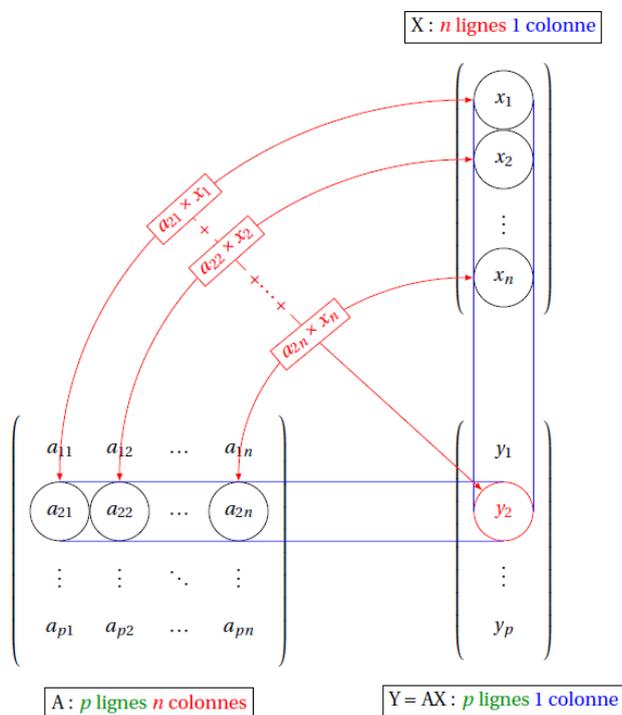


Soit φ la forme linéaire de \mathbb{R}^3 associée à la matrice "ligne" $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer matriciellement $\varphi(u)$ avec $u = (1, 2, 3)$.

Soit maintenant $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

La matrice de f ayant p lignes, en répétant ce qui précède pour chaque ligne, on obtient en fait la matrice "colonne" de $f(x)$:



Soit f l'application linéaire associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer matriciellement $f(u)$ avec $u = (1, 2, -1, -2)$.



En fait, on vient de définir le produit AX avec :

$$A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \text{ et } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

De plus, si A est la matrice de l'application linéaire f et X celle du vecteur x , alors AX sera celle du vecteur $f(x)$:

$$\mathcal{M}(f)\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}(f(x))$$

Vous noterez que la matrice $Y = AX$ est bien dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

2. Pour déterminer la matrice d'une composée

On sait composer deux applications linéaires $f : E \rightarrow F$ et $g : D \rightarrow E$:

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x))$$

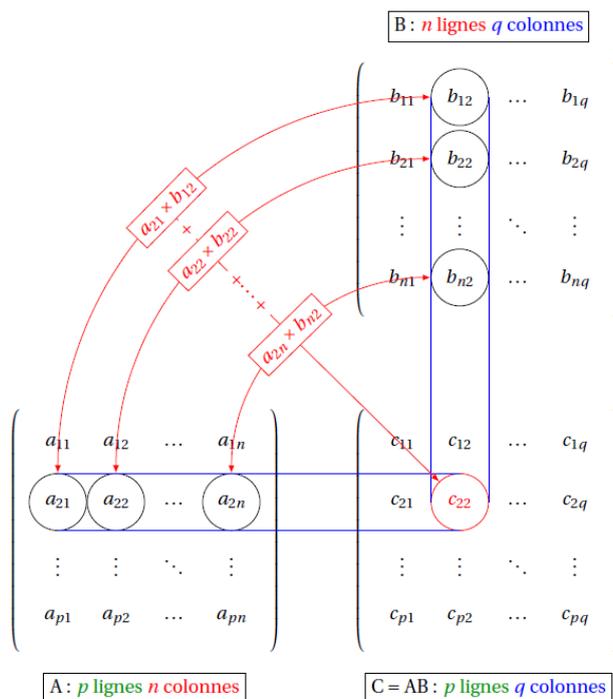
On aimerait multiplier leurs matrices de sorte que :

$$\mathcal{M}(f)\mathcal{M}(g) = \mathcal{M}(f \circ g)$$



Les bases à l'arrivée de g et au départ de f doivent être les mêmes

En fait, il suffit de généraliser ce qui précède...



- La multiplication matricielle ne se fait pas terme à terme^a
- Elle n'est pas commutative :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mais } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comment peut-on interpréter ce résultat géométriquement ?

^a. Ce produit existe, il est appelé produit d'Hadamard et est utilisé, par exemple, pour les filtres en traitement d'images ou pour caractériser l'anti-symétrie d'une relation dans un ensemble à partir de la matrice d'adjacence

IV. Inversion de matrices

1. Matrice inversible

Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

Si f est bijective, alors $n = p$ et sa bijection réciproque f^{-1} est un endomorphisme de \mathbb{R}^n vérifiant :

$$f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}^n} \text{ et } f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^n}$$

En "passant aux matrices", il vient :

$$\mathcal{M}(f) \cdot \mathcal{M}(f^{-1}) = I_n \text{ et } \mathcal{M}(f^{-1}) \cdot \mathcal{M}(f) = I_n$$

On dira que $\mathcal{M}(f)$ est inversible d'inverse $\mathcal{M}(f^{-1})$:

$$\boxed{(\mathcal{M}(f))^{-1} = \mathcal{M}(f^{-1})}$$



Dans \mathbb{R} , 2 est inversible d'inverse $\frac{1}{2}$ car $2 \times \frac{1}{2} = 1$ et (par commutativité) $\frac{1}{2} \times 2 = 1$.

On note aussi $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Définition (matrice inversible et matrice inverse).

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n$$

Dans ce cas, B est unique, appelée matrice inverse de A et notée A^{-1} .



Une matrice qui n'est pas carrée ne peut pas être inversible



Contrairement à un réel non nul qui est toujours inversible, une matrice carrée non nulle ne l'est pas toujours.
En fait, l'inversibilité d'une matrice traduit la bijectivité de l'application linéaire associée.



1. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2

(b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

(c) Interpréter ce résultat géométriquement.

2. Montrer géométriquement que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Peut-on voir ce dernier résultat à partir de la matrice uniquement?

Définition (déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2).

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Le déterminant de A , noté $\det(A)$ ou $|A|$, est le réel défini par :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Définition (déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3).

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Le déterminant de A est le réel défini par :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$



On a "développé suivant la première ligne" :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

En réalité, on peut développer suivant n'importe quelle ligne ou colonne.



Les signes des coefficients devant les déterminants d'ordre 2 changent :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$



- Développement suivant la 2-ième ligne :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

- Développement suivant la 3-ième colonne :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$



- On choisit la ligne ou la colonne contenant le maximum de 0
- On ne change pas le déterminant en remplaçant une ligne (resp. colonne) par la somme de cette ligne (resp. colonne) et d'une combinaison linéaire des autres. On peut ainsi faire apparaître des zéros, et faciliter le "développement"
- On peut, en généralisant, calculer des déterminants d'ordre supérieur



↳ Lorsqu'on multiplie une ligne (resp. colonne) par un réel, le déterminant l'est également

Propriété (CNS d'inversibilité - admise).

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.



Étudier l'inversibilité des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Comment peut-on déterminer (lorsqu'elle existe) la matrice inverse ?

2. Détermination pratique de l'inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

Déterminer l'inverse de A revient à résoudre l'équation (matricielle) :

$$AX = B$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et de second membre $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En effet, en multipliant (à gauche) les deux membres par A^{-1} , il vient :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

ce qui fournit :

$$I_n X = A^{-1}B$$

ou encore :

$$X = A^{-1}B$$



↳ Si $A = \mathcal{M}(f)$, déterminer $A^{-1} = \mathcal{M}(f^{-1})$ revient à déterminer f^{-1} c'est à dire, pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, l'unique $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = b$.



Déterminons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en résolvant l'équation :

$$AX = B$$

d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et de second membre $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

c'est à dire l'équation :

$$\begin{pmatrix} x+z \\ 2x+2y+3z \\ -x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ou encore le système linéaire :

$$\begin{cases} x & +z & = & a \\ 2x & +2y & +3z & = & b \\ -x & +2y & +z & = & c \end{cases}$$

Pour cela, appliquons la méthode du pivot de Gauss :

On cherche d'abord un système équivalent "échelonné" :

$$\begin{cases} x & +z = a \\ 2x & +2y +3z = b \\ -x & +2y +z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +z = a \\ 2y & +z = -2a+b & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2y & +2z = a+c & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +z = a \\ 2y & +z = -2a+b \\ z & = 3a-b+c & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Ensuite, on résout le système "échelonné" en "remontant" :

$$\begin{cases} x & +z = a \\ 2y & +z = -2a+b \\ z & = 3a-b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +z = a \\ y & = -\frac{5}{2}a+b-\frac{1}{2}c \\ z & = 3a-b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = -2a+b-c \\ y & = -\frac{5}{2}a+b-\frac{1}{2}c \\ z & = 3a-b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Les termes du second membre doivent être bien rangés



On peut présenter la démarche précédente de manière plus "simple" :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$$