M1202 - Algèbre linéaire
Cours 1 - Espaces vectoriels

2020/2021 - A. RIDARD

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - l'icône en dessous du logo IUT
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

Plan du cours

Vous savez des choses !

Plaçons nous dans le plan euclidien, et considérons deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et un réel α.

Vous savez :

- additionner deux vecteurs
  (le résultat $\vec{u} + \vec{v}$ est encore un vecteur)
- multiplier un vecteur par un réel
  (le résultat $\alpha.\vec{u}$ est encore un vecteur)

Vous savez aussi que l'addition est une opération :

- associative : $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ avec $\vec{w}$ un troisième vecteur
- commutative : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- avec un élément neutre : $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
- pour laquelle tout vecteur admet un symétrique : $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

Vous savez enfin que la multiplication est une opération qui vérifie :

- $1.\vec{u}=\vec{u}$
- $\alpha.(\vec{u}+\vec{v})=\alpha.\vec{u}+\alpha.\vec{v}$ (distributivité)
- $\alpha.(\beta.\vec{u})=(\alpha\beta).\vec{u}$ avec β un deuxième réel (pseudo-associativité [1])
- $(\alpha+\beta).\vec{u}=\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{u}$ (pseudo-distributivité [2])

Vous savez en fait ce qu'est un espace vectoriel...

1. Pourquoi pseudo ?
2. Pourquoi pseudo ?

Définition ($\mathbb{R}$-ev ou plus simplement ev)

Un ev est un ensemble E muni de deux opérations :

- une addition (interne) notée $+ : E \times E \to E$
- une multiplication (externe) notée $. : E \times \mathbb{R} \to E$

L'addition (interne) doit être une opération :

- associative : $\forall u, v, w \in E,\ u + (v + w) = (u + v) + w$
- commutative : $\forall u, v \in E,\ u + v = v + u$
- avec un élément neutre noté 0_E ou 0 : $\forall u \in E,\ u + 0 = u$
- pour laquelle tout vecteur admet un symétrique : $\forall u \in E, u + (-u) = 0$

Et la multiplication (externe) doit vérifier :

- $\forall u \in E,\ 1.u = u$
- $\forall u, v \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$
- $\forall u \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u$
- $\forall u \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ (\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$

- Un ev E n'admet qu'un seul élément neutre, appelé aussi vecteur nul, ce qui légitime la notation 0_E
- Dans un ev, un vecteur u n'admet qu'un seul symétrique, appelé aussi opposé, ce qui légitime la notation $-u$

Dorénavant, un vecteur désignera un élément d'un ev !
On ne mettra donc plus de flèches sur les vecteurs.

Ne pas confondre les vecteurs et les réels.
La lettre x pourra désigner, suivant le contexte, un vecteur si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ou un réel si $u = (x, y, z)$.

On notera la multiplication du vecteur u par le réel α, non plus $\alpha.u$, mais simplement αu.

Ne pas confondre les opérations sur les vecteurs et celles sur les réels

Propriété : simplification

Soit E un ev et u, v, w des vecteurs de E.
Si $u+v=u+w$, alors $v=w$.

Démontrer cette propriété à l'aide de la définition d'un ev.

Propriété : multiplication externe

Soit E un ev, u un vecteur de E et α un réel.

- $0u=0_E$ ou plus simplement (à condition de maîtriser) $0u=0$
- $\alpha 0_E=0_E$ ou plus simplement $\alpha 0=0$
- $(-1)u=-u$

Démontrer cette propriété à l'aide de la définition d'un ev et de la propriété de simplification.

Propriété : ev des n-uplets de réels - admise

L'ensemble $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ muni des opérations définies par :

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
- $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

forme un ev dont le vecteur nul est le n-uplet $(0, \dots, 0)$.

Propriété : ev des suites réelles - admise

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} | u_0, \dots \in \mathbb{R}\}$ muni des opérations définies par :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\alpha (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

forme un ev dont le vecteur nul est la suite nulle.

Propriété : ev des fonctions réelles d'une variable réelle - admise

L'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni des opérations définies par :

- $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$
- $\alpha f : x \mapsto \alpha f(x)$

forme un ev dont le vecteur nul est la fonction nulle.

Définition (sev)

Soit E un ev et F une partie de E.
On dit que F est un sev de E si :

- $F \neq \emptyset$
- F est stable par addition : $\forall u, v \in F,\ u+v \in F$
- F est stable par multiplication : $\forall u \in F,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha u \in F$

- Les deux derniers points sont équivalents à :

$$\forall u, v \in F,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha u + \beta v \in F \qquad \text{(stabilité par combinaison linéaire)}$$

  ou encore $\forall u, v \in F,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha u + v \in F$ (**critère pratique**)
- Si F est un sev de E, alors $0_E \in F$ (pourquoi ?).
  Ainsi, **pour savoir si F est un sev de E, on regarde d'abord si $0_E \in F$. Si non, ce n'est pas un sev de E ; si oui, on regarde la stabilité**.
- F muni des restrictions [a] de + et . est un ev.
  Ainsi, **pour montrer qu'un ensemble est un ev, il suffit de montrer que c'est un sev d'un ev de référence**.

a. Il s'agit de restreindre les ensembles de départ : $+_F : F \times F \to E$ et $._F : F \times \mathbb{R} \to E$

Voici alors trois nouveaux ev de référence :

Propriété : ev des applications réelles d'une variable réelle - évidente

L'ensemble des applications réelles d'une variable réelle,

$$\mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | D_f = \mathbb{R}\}$$

est un sev de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et donc un ev.

Propriété : ev des polynômes - évidente

L'ensemble des polynômes (à coefficents réels),

$$\mathbb{R}[X] = \{P \in \mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | P \text{ soit polynomiale}\}$$

est un sev de $\mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et donc un ev.

L'application P est dite polynomiale si elle est de la forme

$$P : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels avec $a_n \neq 0$.

On dira alors que P est un polynôme de degré n.

En notant X^k le monôme de degré k c'est à dire $X^k : x \mapsto x^k$, on a donc :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$

Propriété : ev des polynômes de degré inférieur ou égal à n - évidente

L'ensemble des polynômes (à coefficents réels) de degré inférieur ou égal à n,

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] | \deg(P) \leq n\}$$

est un sev de $\mathbb{R}[X]$ et donc un ev.

Montrer que les ensembles suivants sont des sev :

- Les triplets de $\mathbb{R}^3$ dont la première composante est nulle
- Les suites réelles convergentes
- Les applications réelles continues sur $\mathbb{R}$
- Les polynômes qui s'annulent en 1

Montrer que les ensembles suivants ne sont pas des sev :

- Les couples de $\mathbb{R}^2$ dont la deuxième composante est la valeur absolue de la première
- Les suites réelles majorées
- Les applications réelles positives [a] sur $\mathbb{R}$
- Les polynômes de degré 2

a. En Mathématiques, positif signifie positif ou nul

Dans $\mathbb{R}^2$, si F est un sev contenant $(1,0)$, alors il contient aussi tous les vecteurs de la forme $\alpha(1,0)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, autrement dit $\{\alpha(1,0) | \alpha \in \mathbb{R}\} \subset F$.

En fait, $\{\alpha(1,0) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ est le plus petit [3] sev contenant $(1,0)$.

On dira que c'est :

- l'ensemble des vecteurs colinéaires à $(1,0)$
- le sev engendré par $(1,0)$, noté $Vect((1,0))$
- la droite vectorielle engendrée par $(1,0)$

De la même manière, on a ...

3. Au sens de l'inclusion

Dans $\mathbb{R}^3$, si F est un sev contenant (1,0,0) et (0,1,0), alors il contient aussi tous les vecteurs de la forme $\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, autrement dit $\{\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)|\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\subset F$.

En fait, $\{\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)|\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ est le plus petit sev contenant (1,0,0) et (0,1,0).

On dira que c'est :

- l'ensemble des combinaisons linéaires de (1,0,0) et (0,1,0)
- le sev engendré par (1,0,0) et (0,1,0), noté $Vect((1,0,0),(0,1,0))$
- le plan vectoriel engendré par (1,0,0) et (0,1,0)

Plus généralement, on a ...

Définition (combinaison linéaire de vecteurs)

Soit E un ev et $u_1,\dots,u_n$ des vecteurs de E.
Une combinaison linéaire de $u_1,\dots,u_n$ est un vecteur de la forme

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

où les α_i sont les coefficients (réels) de la combinaison linéaire.

Définition (sev engendré par des vecteurs)

Soit E un ev et $u_1,\dots,u_n$ des vecteurs de E.
On appelle sev engendré par $u_1,\dots,u_n$, noté $Vect(u_1,\dots,u_n)$, l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1,\dots,u_n$:

$$Vect(u_1,\dots,u_n) = \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n | \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

- C'est bien un sev de E, et même le plus petit contenant $u_1,\dots,u_n$
- **Pour montrer que $Vect(u_1,\dots,u_n)$ est inclus dans un sev F de E, il suffit alors de montrer que $u_1,\dots,u_n \in F$**

Définition (droite vectorielle, plan vectoriel)

Soit E un ev et u, v des vecteurs de E avec $u \neq 0_E$.

- $Vect(u)$ est appelé droite vectorielle engendrée par u. C'est l'ensemble des vecteurs dits colinéaires à u.
- Si v n'est pas colinéaire à u c'est à dire $v \notin Vect(u)$, alors $Vect(u, v)$ est appelé plan vectoriel engendré par u et v.

Dans $\mathbb{R}^2$

On considère $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by = 0\right\}$ avec $b \neq 0$.
Montrer que D est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(-b, a)$.

Dans $\mathbb{R}^3$

On considère $P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | ax+by+cz=0\right\}$ avec $c \neq 0$.
Montrer que P est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $(-c,0,a)$ et $(0,-c,b)$.

Dans $\mathbb{R}^3$

On considère D l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax+by+cz & = & 0 \\ a'x+b'y+c'z & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Si $(a,b,c) = (1,1,2)$ et $(a',b',c') = (1,2,1)$, montrer que $D = Vect\big((-3,1,1)\big)$
2. Si $(a,b,c) = (1,1,1)$ et $(a',b',c') = (1,2,2)$, montrer que $D = Vect\big((0,-1,1)\big)$

1. Espace vectoriel (ev)
2. Base
3. Dimension

Dans toute la suite, E désigne un ev et $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E.

?

A-t-on toujours :

- $Vect(u_1, \dots, u_n) \subset E$?
- $E \subset Vect(u_1, \dots, u_n)$?

Définition (famille génératrice d'un ev)

On dit que $(u_1,\dots,u_n)$ est une famille génératrice de E si $E = Vect(u_1,\dots,u_n)$ ce qui équivaut à dire que tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de $u_1,\dots,u_n$.

$(u_1,\dots,u_n)$ est évidemment une famille génératrice de $Vect(u_1,\dots,u_n)$

Propriété : principe de réduction d'une famille génératrice

Si $(u_1,\dots,u_n)$ est une famille génératrice de E et si $u_n \in Vect(u_1,\dots,u_{n-1})$, alors la sous-famille $(u_1,\dots,u_{n-1})$ est génératrice de E.

Démontrer cette propriété.

1. Montrer que la famille $((1,0),(0,1),(1,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. L'écriture en combinaison linéaire de $(1,0),(0,1),(1,1)$ est-elle unique ?
3. A l'aide du principe de réduction, montrer que la sous-famille $((1,0),(1,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
4. L'écriture en combinaison linéaire de $(1,0),(1,1)$ est-elle unique ?

Définition (vecteurs linéairement indépendants)

On dit que $u_1, \dots, u_n$ sont linéairement indépendants si :

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \; (\alpha_1 u_1 \dots + \alpha_n u_n = 0_E) \Rightarrow (\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0)$$

Dans le cas contraire [a], les vecteurs sont dits linéairement dépendants.

a. Savez-vous l'exprimer ?

Cela signifie que la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire triviale (tous les coefficients nuls).

Dans $\mathbb{R}^2$

- Montrer que les vecteurs $(1,0), (0,1), (1,1)$ sont linéairement dépendants.
- Montrer que les vecteurs $(1,0), (1,1)$ sont linéairement indépendants.

Définition (famille libre)

On dit que $(u_1,\ldots,u_n)$ est une famille libre si les vecteurs $u_1,\ldots,u_n$ sont linéairement indépendants.
Dans le cas contraire, la famille est dite liée.

Propriété : principe d'extension d'une famille libre

Si $(u_1,\ldots,u_n)$ est une famille libre et si $u \in E$ n'appartient pas à $Vect(u_1,\ldots,u_n)$, alors la sur-famille $(u_1,\ldots,u_n,u)$ est libre.

Démontrer cette propriété.

Propriété : unicité de l'écriture

Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre, alors tout vecteur de $Vect(u_1, \dots, u_n)$ s'écrit **de manière unique** comme combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$.

Démontrer cette propriété.

?

Tout vecteur de E s'écrit-il de manière unique comme combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$?

Définition (base)

On dit que $(u_1,\dots,u_n)$ est une base de E si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $u_1,\dots,u_n$:

$$\forall u\in E,\ \exists!\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R},\ \ u=\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_n u_n$$

Dans ce cas, les coefficients $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sont appelés les coordonnées du vecteur u dans la base $(u_1,\dots,u_n)$.

Propriété : CNS pour être une base - **évidente**

$(u_1,\dots,u_n)$ est une base de E si et seulement si c'est une famille libre et génératrice de E.

Une base est dite canonique si elle est naturelle d'après la manière dont l'espace vectoriel est présenté :

- $((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$
- $(1,X,\dots,X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

Définition (ev de dimension finie)

Un ev est dit de dimension finie s'il possède (au moins) une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, il est dit de dimension infinie.

Les ev suivants sont-ils de dimension finie ou infinie ?

- $\mathbb{R}^n$
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- $\mathbb{R}[X]$
- $\mathbb{R}_n[X]$

Propriété : existence d'une base en dimension finie - admise

Un ev de dimension finie possède (au moins) une base.

Propriété : famille libre et famille génératrice en dimension finie - admise

Dans un ev de dimension finie, une famille libre ne peut pas avoir plus de vecteurs qu'une famille génératrice.

Corollaire

Dans un ev de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs.

Démontrer ce corollaire.

Définition (dimension d'un ev)

Soit E un ev de dimension finie.
Le nombre de vecteurs dans une base de E est appelé dimension de E et noté $\dim(E)$.

Déterminer les dimensions suivantes.

- $\dim(\mathbb{R}^n)$
- $\dim(\mathbb{R}_n[X])$

Propriété : famille libre et famille génératrice en dimension connue

Dans un ev de dimension n,

- une famille libre a au plus n vecteurs.
  Si elle en a n, c'est une base.
- une famille génératrice a au moins n vecteurs.
  Si elle en a n, c'est une base.

Démontrer cette propriété.

En dimension finie connue, **pour montrer qu'une famille avec le bon nombre de vecteurs est une base, on peut soit montrer qu'elle est libre, soit montrer qu'elle est génératrice**.

Propriété : complétion - admise

Soit E un ev de dimension finie, $\mathscr{L}$ une famille libre et $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. On peut alors former une base de E en complétant $\mathscr{L}$ par des vecteurs bien choisis dans $\mathscr{G}$.

Corollaire : évident

Dans un ev de dimension finie,

- une famille libre peut être complétée en une base
- d'une famille génératrice, on peut extraire une base

Propriété : dimension d'un sev - admise

Soit E un ev de dimension finie et F un sev de E.

- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$
- Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$

En dimension finie, **pour montrer une égalité entre deux ev, on peut montrer une inclusion et l'égalité des dimensions**, plutôt que la double inclusion.

Définition (rang d'une famille de vecteurs)

Le rang de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est la dimension de $Vect(u_1, \ldots, u_n)$.

Si on dispose des coordonnées de $u_1, \ldots, u_n$ dans une base, **la *méthode du pivot de Gauss* permet de déterminer une base de** $Vect(u_1, \ldots, u_n)$ **et donc sa dimension**.

Cette méthode repose sur les remarques suivantes :

- permuter les vecteurs ne change pas le sev engendré
- multiplier un des vecteurs par un réel non nul ne change pas le sev engendré
- remplacer un des vecteurs par la somme de ce vecteur et d'une combinaison linéaire des autres ne change pas le sev engendré
- une famille "échelonnée" de vecteurs est libre

Présentons cette méthode à l'aide d'un exemple :

dans $\mathbb{R}^4$, déterminer la dimension et une base de $Vect(u_1, u_2, u_3, u_4)$ avec :

$$\begin{aligned}
u_1 &= (1, 1, -1, -2)\\
u_2 &= (1, -1, -1, 2)\\
u_3 &= (2, 2, 4, -2)\\
u_4 &= (1, -1, -4, 1)
\end{aligned}$$

On choisit un pivot sur la première ligne (valeur non nulle) :

C_1	C_2	C_3	C_4	Suivi des variables
1	1	2	1	$C_1 = u_1$
1	−1	2	−1	$C_2 = u_2$
−1	−1	4	−4	$C_3 = u_3$
−2	2	−2	1	$C_4 = u_4$

On fait apparaître des zéros sur la première ligne à droite du pivot :

	$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$	$C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$	$C_4 \leftarrow C_4 - C_1$	Suivi des variables
1	0	0	0	$C_1 = u_1$
1	−2	0	−2	$C_2 = u_2 - u_1$
−1	0	6	−3	$C_3 = u_3 - 2u_1$
−2	4	2	3	$C_4 = u_4 - u_1$

On choisit ensuite un pivot sur la deuxième ligne :

C_1	C_2	C_3	C_4	Suivi des variables
1	0	0	0	$C_1 = u_1$
1	-2	0	-2	$C_2 = u_2 - u_1$
-1	0	6	-3	$C_3 = u_3 - 2u_1$
-2	4	2	3	$C_4 = u_4 - u_1$

On fait apparaître des zéros sur la deuxième ligne à droite du pivot :

			$C_4 \leftarrow C_4 - C_2$	Suivi des variables
1	0	0	0	$C_1 = u_1$
1	-2	0	0	$C_2 = u_2 - u_1$
-1	0	6	-3	$C_3 = u_3 - 2u_1$
-2	4	2	-1	$C_4 = u_4 - u_2$

On choisit enfin un pivot sur la troisième ligne :

C_1	C_2	C_3	C_4	Suivi des variables
1	0	0	0	$C_1 = u_1$
1	-2	0	0	$C_2 = u_2 - u_1$
-1	0	$\boxed{6}$	-3	$C_3 = u_3 - 2u_1$
-2	4	2	-1	$C_4 = u_4 - u_2$

On fait apparaître des zéros sur la troisième ligne à droite du pivot :

			$C_4 \leftarrow 2C_4 + C_3$	Suivi des variables
1	0	0	0	$C_1 = u_1$
1	-2	0	0	$C_2 = u_2 - u_1$
-1	0	$\boxed{6}$	0	$C_3 = u_3 - 2u_1$
-2	4	2	0	$C_4 = 2u_4 - 2u_2 + u_3 - 2u_1$

Finalement, on a :

C_1	C_2	C_3	C_4	Suivi des variables
1	0	0	0	$C_1 = u_1$
1	-2	0	0	$C_2 = u_2 - u_1$
-1	0	6	0	$C_3 = u_3 - 2u_1$
-2	4	2	0	$C_4 = 2u_4 - 2u_2 + u_3 - 2u_1$

On pose $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 - u_1$, $v_3 = u_3 - 2u_1$ et $v_4 = 2u_4 - 2u_2 + u_3 - 2u_1$.

Les opérations réalisées sur les colonnes nous assure que :

$$Vect(u_1, u_2, u_3, u_4) = Vect(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

De plus, $v_4 = 0$ donc on a :

$$Vect(u_1, u_2, u_3, u_4) = Vect(v_1, v_2, v_3)$$

Autrement dit, la famille (v_1, v_2, v_3) est génératrice de $Vect(u_1, u_2, u_3, u_4)$.
En outre, la famille (v_1, v_2, v_3) est "échelonnée" donc libre (pourquoi ?).
Par conséquent, (v_1, v_2, v_3) est une base de $Vect(u_1, u_2, u_3, u_4)$ qui est alors de dimension 3.