M1202 - Algèbre linéaire
Cours 2 - Applications linéaires

2020/2021 - A. RIDARD

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - l'icône en dessous du logo IUT
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

Plan du cours

Définition (application linéaire ou morphisme d'ev)

Soit E, F deux ev et $f : E \to F$ une application.
On dit que l'application f est linéaire si :

- f respecte l'addition : $\forall u, v \in E,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$
- f respecte la multiplication : $\forall u \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha u) = \alpha f(u)$

- Les deux derniers points sont équivalents à :

  $\forall u, v \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$ (f respecte la comb. linéaire)

  ou encore

  $$\forall u, v \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$$ (**critère pratique**)

- $f(0_E) = 0_F$
- L'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images
- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un ev noté $\mathscr{L}(E, F)$
- La composée de deux applications linéaires est une application linéaire
- Lorsque $E = F$, on dit que f est un endomorphisme de E

- Lorsque $F = \mathbb{R}$, on dit que f est une forme linéaire de E
- Lorsque $F = \mathbb{R}^p$, la i-ième fonction coordonnée de f est définie par :

$$f_i : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \text{la } i\text{-ième composante de } f(u) \end{array}$$

L'application f est alors linéaire si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées le sont.

Propriété : les formes linéaires de $\mathbb{R}^n$

Les formes linéaires de $\mathbb{R}^n$ sont les applications définies par :

$$\varphi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \end{array} \quad \text{avec} \quad a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$$

Des transformations du plan bien connues

- Montrer qu'une homothétie définie par :

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \lambda(x,y) \end{array} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

  est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

- Montrer que la projection orthogonale sur $Vect((1,0))$ définie par :

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

  est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

- Montrer que la symétrie orthogonale par rapport à $Vect((1,0))$ définie par :

$$s: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,-y) \end{array}$$

  est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

Des transformations de fonction bien connues

- Montrer que l'application dérivée définie par :

$$D: \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

est une application linéaire de l'ev $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dans l'ev $\mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

- Montrer que l'application intégrale définie par :

$$I: \begin{array}{ccc} \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f(x)dx \end{array}$$

est une forme linéaire de l'ev $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[a,b]$

Propriété : définition d'une application linéaire connaissant une base au départ

Soit E, F des ev et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Pour définir une application linéaire f de E dans F, il suffit de connaître les images des vecteurs de la base de E c'est à dire $f(e_1), \ldots, f(e_n)$.

Démontrer cette propriété.

- La forme linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & ax+by+cz \end{array} \qquad \text{avec } a,b,c \in \mathbb{R}$$

  est entièrement déterminée par ...

- La projection orthogonale p sur $Vect((1,0))$ définie par :

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

  est entièrement déterminée par ...

Dans la suite, E, F **désignent des ev et** $f \in \mathscr{L}(E,F)$**.**

Définition (image d'une application linéaire)

L'image de f, notée $Im(f)$, est l'ensemble des images des vecteurs de E :

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{v \in F | \exists u \in E,\ v = f(u)\} \\ &= \{f(u) | u \in E\} \end{aligned}$$

C'est un sev de F (savez-vous le montrer ?)

- L'image de la projection orthogonale sur $Vect((1,0))$ est ...
- L'image de la symétrie orthogonale par rapport à $Vect((1,0))$ est ...
- L'image d'une forme linéaire non nulle est ...
- L'image de l'application dérivée est ...

Propriété : image d'une application linéaire connaissant une base au départ

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $Im(f) = Vect(f(e_1), \ldots, f(e_n))$

Démontrer cette propriété.

Pour déterminer une base de $Im(f)$ et sa dimension, on peut appliquer la méthode du pivot de Gauss à la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$, à condition évidemment que F soit de dimension finie

Soit f l'application linéaire définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x-y+z, 2x+2y+6z+4t, -x-2z-t) \end{array}$$

On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et

$$u_1 = f(e_1), u_2 = f(e_2), u_3 = f(e_3), u_4 = f(e_4)$$

La dimension de $Im(f)$ étant le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4), on applique la méthode du pivot de Gauss à :

C_1	C_2	C_3	C_4	Suivi des variables
1	-1	1	0	$C_1 = u_1$
2	2	6	4	$C_2 = u_2$
-1	0	-2	-1	$C_3 = u_3$
				$C_4 = u_4$

Au final, on obtient :

C_1	C_2	C_3	C_4	Suivi des variables
1	0	0	0	$C_1 = u_1$
2	4	0	0	$C_2 = u_2 + u_1$
-1	-1	0	0	$C_3 = u_3 - u_2 - 2u_1$
				$C_4 = u_4 - u_2 - u_1$

En posant $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 + u_1$, $v_3 = u_3 - u_2 - 2u_1$ et $v_4 = u_4 - u_2 - u_1$, il apparaît que (v_1, v_2) est une base de $Im(f)$ qui est alors de dimension 2.

Définition (rang d'une application linéaire)

La dimension de $Im(f)$ est appelée le rang de f, noté $rg(f)$.

Définition (noyau d'une application linéaire)

Le noyau de f, notée $Ker(f)$, est l'ensemble des antécédents de 0_F :

$$Ker(f) = \{u \in E | f(u) = 0_F\}$$

C'est un sev de E (savez-vous le montrer ?)

- Le noyau de la projection orthogonale sur $Vect((1,0))$ est ...
- Le noyau de la symétrie orthogonale par rapport à $Vect((1,0))$ est ...
- Le noyau de l'application dérivée est ...
- Le noyau de la forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & ax+by \end{array} \qquad \text{avec } a,b \in \mathbb{R}$$

  est la droite (vectorielle) d'équation : ...
- Le noyau de la forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & ax+by+cz \end{array} \qquad \text{avec } a,b,c \in \mathbb{R}$$

  est le plan (vectoriel) d'équation : ...
- Le noyau de la forme linéaire de $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & a_1x_1+\cdots+a_nx_n \end{array} \qquad \text{avec } a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$$

  est l'hyperplan (vectoriel) d'équation : ...

Soit f l'application linéaire définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x-y+z, 2x+2y+6z+4t, -x-2z-t) \end{array}$$

Déterminer le noyau de f, c'est résoudre le système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcl} x & -y & +z & & = & 0 \\ 2x & +2y & +6z & +4t & = & 0 \\ -x & & -2z & -t & = & 0 \end{array} \right.$$

Pour cela, on applique la méthode du pivot de Gauss *sur les lignes*.

Cette méthode repose sur les remarques suivantes :

- permuter les équations ne change pas les solutions
- multiplier une des éq. par un réel non nul ne change pas les solutions
- remplacer une éq. par la somme de cette éq. et d'une combinaison linéaire des autres ne change pas les solutions
- un système "échelonné" est facile à résoudre "en remontant"

On choisit un pivot sur la première ligne (terme non nul) :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrr} \boxed{x} & -y & +z & & = & 0 & L_1 \\ 2x & +2y & +6z & +4t & = & 0 & L_2 \\ -x & & -2z & -t & = & 0 & L_3 \end{array}\right.$$

On supprime les termes en dessous du pivot :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl} \boxed{x} & -y & +z & & = & 0 & \\ & 4y & +4z & +4t & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & -y & -z & -t & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

On choisit ensuite un pivot sur la deuxième ligne :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & -y & +z & & = & 0 & L_1 \\ & \boxed{4y} & +4z & +4t & = & 0 & L_2 \\ & -y & -z & -t & = & 0 & L_3 \end{array}\right.$$

On supprime les termes en dessous du pivot :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & -y & +z & & = & 0 & \\ & \boxed{4y} & +4z & +4t & = & 0 & \\ & & 0z & +0t & = & 0 & L_3 \leftarrow 4L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

Le dernier système est bien "échelonné" :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & -y & +z & & = & 0 \\ & 4y & +4z & +4t & = & 0 \\ & & 0z & +0t & = & 0 \end{array}\right.$$

On le résout alors "en remontant" :

La dernière équation étant vraie pour tout $z, t \in \mathbb{R}$, les solutions (x, y, z, t) s'exprimeront en fonction de z et t.
Plus précisément, on a :

- $y = -z - t$
- $x = y - z = -2z - t$

Conclusion :

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{(-2z-t,-z-t,z,t) | z,t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-2,-1,1,0)+t(-1,-1,0,1) | z,t \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect((-2,-1,1,0),(-1,-1,0,1)) \end{aligned}$$

Remarque : on verra ci-dessous que **la méthode du pivot de Gauss *sur les colonnes***, utilisée pour déterminer une base et la dimension de $Im(f)$, **permet aussi de déterminer la dimension et une base de** $Ker(f)$.
Ceci étant, savoir résoudre un système linéaire est indispensable en algèbre linéaire !

Théorème du rang - admis

Si E est de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim\left(Ker(f)\right) + rg(f)$

Un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ est de dimension ...

Soit f l'application linéaire définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x-y+z, 2x+2y+6z+4t, -x-2z-t) \end{array}$$

En gardant les notations précédentes, la méthode de Gauss fournit :

$$(v_1, v_2) \text{ base de } Im(f) \text{ et donc } \dim\big(Im(f)\big) = 2$$

Le théorème du rang nous assure alors que $\dim\big(Ker(f)\big) = 4 - 2 = 2$.

De plus, la méthode de Gauss fournit aussi :

- $0 = v_3 = u_3 - u_2 - 2u_1 = f(e_3) - f(e_2) - 2f(e_1) = f(e_3 - e_2 - 2e_1)$
- $0 = v_4 = u_4 - u_2 - u_1 = f(e_4) - f(e_2) - f(e_1) = f(e_4 - e_2 - e_1)$

Autrement dit :

- $e_3 - e_2 - 2e_1 = (-2,-1,1,0) \in Ker(f)$
- $e_4 - e_2 - e_1 = (-1,-1,0,1) \in Ker(f)$

Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre de $Ker(f)$ qui est de dimension 2. En fait, ils forment une base de $Ker(f)$.

Propriété : CNS de surjectivité - évidente

f surjective $\iff Im(f) = F$.

Si F est de dimension finie, alors on a : f surjective $\iff rg(f) = dim(F)$

Propriété : image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective

Si f est surjective et si la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E, alors la famille des images $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F.

Démontrer cette propriété.

Si f est surjective et E de dimension finie, alors F l'est aussi et $\dim(E) \geq \dim(F)$

Propriété : CNS d'injectivité

f injective $\Longleftrightarrow Ker(f) = \{0_E\}$.

Démontrer cette propriété.

Pour montrer que f est injective, il suffit donc de montrer que 0_F admet un unique antécédent qui est 0_E.
En général, pour montrer qu'une application est injective, il faut montrer que toute image admet un unique antécédent !

Propriété : image d'une famille libre par une application linéaire injective

Si f est injective et si la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est libre, alors la famille des images $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est aussi libre.

Démontrer cette propriété.

Si f est injective et F de dimension finie, alors E l'est aussi et $\dim(E) \leq \dim(F)$

1. Application linéaire
2. Image et noyau
   - Image
   - Noyau
   - Théorème du rang
3. Isomorphisme
   - Surjection
   - Injection
   - Bijection

Définition (isomorphisme)

Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.
Dans ce cas, les ev de départ et d'arrivée sont dits isomorphes [a].

a. Ils possèdent alors les mêmes propriétés relatives à la structure d'ev

Un endomorphisme bijectif est appelé un automorphisme

Propriété : linéarité de la bijection réciproque

Si f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$

Démontrer cette propriété.

Propriété : image d'une base par un isomorphisme - évidente

Si f est bijective et si la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors la famille des images $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

Pour qu'une application linéaire entre deux ev de dimension finie soit bijective, il faut qu'ils aient la même dimension. Cette condition n'est pas suffisante [a], mais lorsqu'elle est remplie, on dispose d'une caractérisation « efficace » de la bijectivité.

a. Savez-vous le prouver ?

Propriété : caractérisation « efficace » d'un isomorphisme

Si $\dim(E) = \dim(F) < +\infty$, alors on a : f bijective $\Longleftrightarrow$ f injective $\Longleftrightarrow$ f surjective

Démontrer cette propriété.

Deux ev de même dimension (finie) sont isomorphes autrement dit il existe un isomorphisme entre les deux.

Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ sont isomorphes en construisant un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $\mathbb{R}^3$.