

DUT Informatique

Année universitaire 2021 / 2022

M4202C – Algèbre linéaire ++

Responsable : A. Ridard



Avant-propos

Ce document est spécifiquement rédigé pour des séances de Cours/TD.

Il présente les éléments de cours habituels (définitions et propriétés) enrichis de remarques, indiquées par  , donnant un certain éclairage pour mieux les comprendre, les retenir et les utiliser.

Ce cours est aussi ponctué d'exercices, indiqués par  , qui seront traités en classe ou à la maison pour bien assimiler les différentes notions présentées. C'est effectivement en étant acteur dans ses apprentissages que l'on profite au mieux des enseignements!

Vous trouverez également des méthodes, indiquées par  , qui correspondent à des savoirs-faire incontournables.

Ce document sera complété par des feuilles de TD ou TP pour s'entraîner d'avantage.

Bonne lecture, et bon travail...

Table des matières

A Point de vue matriciel en dimension finie (rappels)	7
I. Matrices en algèbre linéaire	7
1. Matrice d'un vecteur	7
2. Matrice d'une application linéaire	8
II. Espace vectoriel des matrices	9
1. Addition	9
2. Multiplication par un réel	9
3. A propos de l'ev des matrices	10
III. Multiplication matricielle	10
1. Pour déterminer l'image d'un vecteur	10
2. Pour déterminer la matrice d'une composée	12
IV. Inversion de matrices	13
1. Matrice inversible	13
2. Détermination pratique de l'inverse	15
3. Application aux changements de bases (nouveau)	17
B La diagonalisation	19
I. Eléments propres d'un endomorphisme	19
II. Polynôme caractéristique d'une matrice	20
III. Diagonalisation d'une matrice	21
1. Diagonaliser une matrice diagonalisable	21
2. Conditions de diagonalisabilité	22
3. Exemples	23
IV. Applications de la diagonalisation	23
1. Puissance d'une matrice diagonalisable	23
2. Suites "géométriques" de matrices	23
3. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ou 3	24

Chapitre A

Point de vue matriciel en dimension finie (rappels)

Sommaire

I. Matrices en algèbre linéaire	7
1. Matrice d'un vecteur	7
2. Matrice d'une application linéaire	8
II. Espace vectoriel des matrices	9
1. Addition	9
2. Multiplication par un réel	9
3. A propos de l'ev des matrices	10
III. Multiplication matricielle	10
1. Pour déterminer l'image d'un vecteur	10
2. Pour déterminer la matrice d'une composée	12
IV. Inversion de matrices	13
1. Matrice inversible	13
2. Détermination pratique de l'inverse	15
3. Application aux changements de bases (nouveau)	17

I. Matrices en algèbre linéaire

On considère deux ev E et F munis respectivement des bases :

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \text{ et } \mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$$

1. Matrice d'un vecteur

Nous savons qu'un vecteur $u \in E$ est déterminé de manière unique par ses coordonnées $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans la base \mathcal{B} :

$$u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

Définition (matrice d'un vecteur).

On appelle matrice du vecteur u dans la base \mathcal{B} , notée $\mathcal{M}(u, \mathcal{B})$, la matrice "colonne" formée des coordonnées de u dans \mathcal{B} :

$$\mathcal{M}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$



| Cette matrice dépend évidemment de la base choisie



| On notera simplement $\mathcal{M}(u)$ s'il s'agit de la base canonique ou s'il n'y a pas d'ambiguïté concernant la base

2. Matrice d'une application linéaire

Nous savons également qu'une application linéaire f de E dans F est entièrement déterminée par les images $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

De plus, les vecteurs $f(e_i) \in F$ sont déterminés de manière unique par leurs coordonnées $\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{pi}$ dans la base \mathcal{B}' .

Définition (matrice d'une application linéaire).

On appelle matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, notée $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, la matrice formée, en colonnes, des coordonnées de $f(e_1), \dots, f(e_n)$ dans \mathcal{B}' :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pn} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$$



| Cette matrice dépend évidemment des bases choisies



| On notera simplement $\mathcal{M}(f)$ s'il s'agit des bases canoniques ou s'il n'y a pas d'ambiguïté concernant les bases



- Soit f l'application linéaire définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x - y + z, 2x + 2y + 6z + 4t, -x - 2z - t) \end{array}$$

Sa matrice est $\mathcal{M}(f) = \dots$

- Soit φ la forme linéaire de \mathbb{R}^3 définie par :

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x + 2y - z \end{array}$$

Sa matrice "ligne" est $\mathcal{M}(\varphi) = \dots$

- Soit p la projection orthogonale sur $\text{Vect}((1, 0))$ définie par :

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, 0) \end{array}$$

Sa matrice est $\mathcal{M}(p) = \dots$

- Soit s la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}((1, 0))$ définie par :

$$s: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, -y) \end{array}$$

Sa matrice est $\mathcal{M}(s) = \dots$

- Soit h l'homothétie définie par :

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \lambda(x, y) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$

Sa matrice est $\mathcal{M}(h) = \dots$



| Si $\lambda = 1$, l'homothétie est en fait l'application identité, et sa matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est appelée matrice identité d'ordre 2.

II. Espace vectoriel des matrices

1. Addition

On sait additionner deux applications linéaires f, g de E dans F :

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$$

On aimerait additionner leurs matrices de sorte que :

$$\mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g) = \mathcal{M}(f + g)$$



Les bases choisies doivent être les mêmes pour f et g

En fait, il suffit d'additionner les matrices terme à terme...

Définition (addition de matrices).

L'addition de deux matrices de même taille^a $p \times n$ est définie par :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} + b_{p1} & \dots & a_{pn} + b_{pn} \end{pmatrix}$$

a. Elles doivent avoir le même nombre de lignes p et le même nombre de colonnes n

2. Multiplication par un réel

On sait aussi multiplier par $\lambda \in \mathbb{R}$ une application linéaire f de E dans F :

$$\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$$

On aimerait aussi multiplier par $\lambda \in \mathbb{R}$ sa matrice de sorte que :

$$\lambda \mathcal{M}(f) = \mathcal{M}(\lambda f)$$

En fait, il suffit de multiplier par λ chaque coefficient de la matrice...

Définition (multiplication par un réel).

La multiplication par $\lambda \in \mathbb{R}$ d'une matrice de taille $p \times n$ est définie par :

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{p1} & \dots & \lambda a_{pn} \end{pmatrix}$$



Soit p la projection orthogonale sur $\text{Vect}((1, 0))$ définie par :

$$p : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x, 0) \end{array}$$

1. Déterminer la matrice de $2p - id$ où id désigne l'application identité.
2. En déduire que $2p - id = s$ où s désigne la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}((1, 0))$
3. Illustrer ce résultat à l'aide d'un dessin.

3. A propos de l'ev des matrices

Propriété (admise).

- L'ensemble des matrices de taille $p \times n$, noté $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, est un ev.
- Les matrices E_{ij} ($1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n$), où tous les coefficients sont nuls sauf e_{ij} qui vaut 1, forment la base canonique de l'ev $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ qui est donc de dimension pn .
- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ via l'isomorphisme défini par :

$$\begin{aligned} \phi: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) &\longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \mathcal{M}(f) \end{aligned}$$



- L'ensemble des matrices "carrées" de taille $n \times n$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De telles matrices sont dites d'ordre n .
- La base canonique de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ϕ est une application linéaire par définition des opérations sur les matrices!
- ϕ est bijective car, étant donnée une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, il existe une unique application linéaire f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p dont la matrice (dans les bases canoniques) est A . Plus précisément, cette unique **application linéaire associée à A** , est définie par :

$$f((1, 0, \dots, 0)) = (a_{11}, \dots, a_{p1}), \dots, f((0, \dots, 0, 1)) = (a_{1n}, \dots, a_{pn})$$

⚠ Un vecteur de \mathbb{R}^p se note toujours en ligne, c'est sa matrice qui est en colonne (évitons les abus).

- En fait, cet isomorphisme "naturel" permet de transformer un problème d'algèbre linéaire (de dimension finie) en un problème matriciel dont la résolution est plus pratique ^a!

a. On peut par exemple utiliser la structure de tableaux dans les implémentations



On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'application linéaire associée f .
2. De quelle transformation du plan s'agit-il (faire un dessin)?
3. Déterminer la matrice de la rotation (vectorielle) d'angle θ (faire un dessin).

Se posent alors les questions suivantes :

- Comment déterminer matriciellement l'image d'un vecteur par une application linéaire?
- Comment déterminer la matrice de la composée de deux applications linéaires?

III. Multiplication matricielle

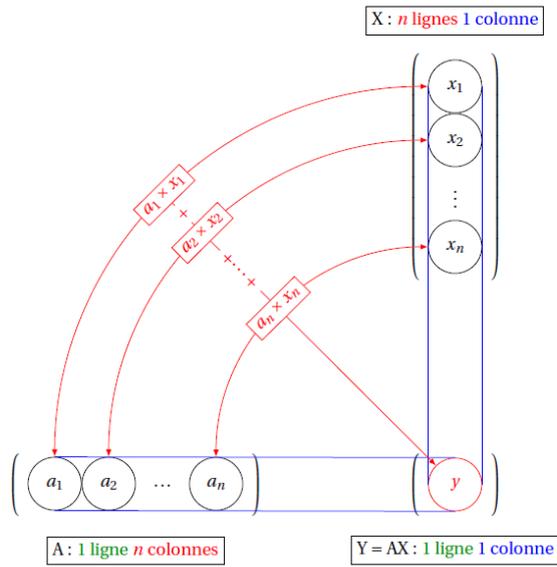
1. Pour déterminer l'image d'un vecteur

Soit φ la forme linéaire de \mathbb{R}^n définie par :

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \quad \text{avec } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sa matrice "ligne" est $\mathcal{M}(\varphi) = (a_1 \quad \dots \quad a_n)$.

Comment déterminer $\varphi(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ à partir des matrices $\mathcal{M}(\varphi) = (a_1 \quad \dots \quad a_n)$ et $\mathcal{M}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$?

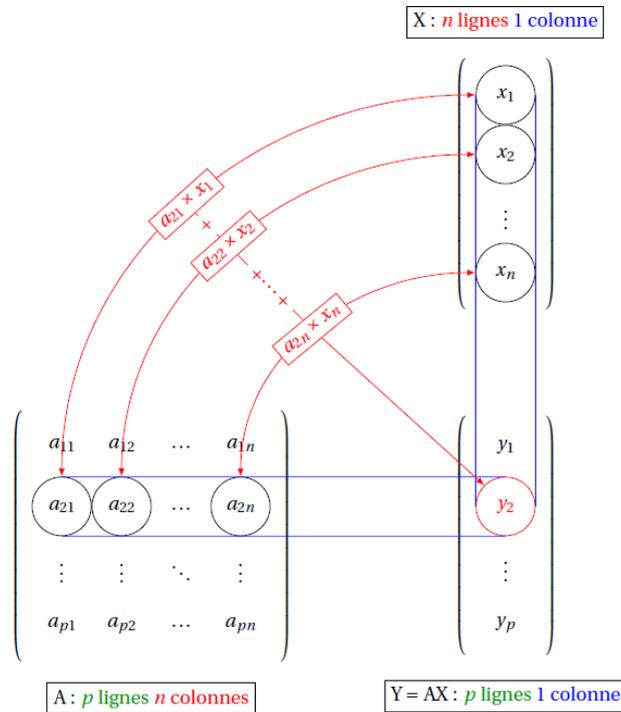


Soit φ la forme linéaire de \mathbb{R}^3 associée à la matrice "ligne" $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer matriciellement $\varphi(u)$ avec $u = (1, 2, 3)$.

Soit maintenant $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

La matrice de f ayant p lignes, en répétant ce qui précède pour chaque ligne, on obtient en fait la matrice "colonne" de $f(x)$:



Soit f l'application linéaire associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer matriciellement $f(u)$ avec $u = (1, 2, -1, -2)$.



En fait, on vient de définir le produit AX avec :

$$A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \text{ et } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

De plus, si A est la matrice de l'application linéaire f et X celle du vecteur x , alors AX sera celle du vecteur $f(x)$:

$$\mathcal{M}(f)\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}(f(x))$$

Vous noterez que la matrice $Y = AX$ est bien dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

2. Pour déterminer la matrice d'une composée

On sait composer deux applications linéaires $f : E \rightarrow F$ et $g : D \rightarrow E$:

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x))$$

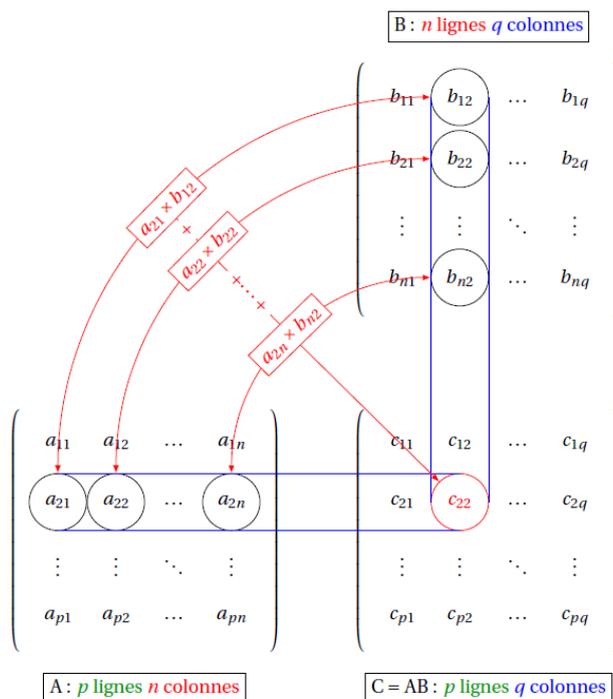
On aimerait multiplier leurs matrices de sorte que :

$$\mathcal{M}(f)\mathcal{M}(g) = \mathcal{M}(f \circ g)$$



Les bases à l'arrivée de g et au départ de f doivent être les mêmes

En fait, il suffit de généraliser ce qui précède...



- La multiplication matricielle ne se fait pas terme à terme ^a
- Elle n'est pas commutative :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mais } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comment peut-on interpréter ce résultat géométriquement ?

^a Ce produit existe, il est appelé produit d'Hadamard et est utilisé, par exemple, pour les filtres en traitement d'images ou pour caractériser l'anti-symétrie d'une relation dans un ensemble à partir de la matrice d'adjacence

IV. Inversion de matrices

1. Matrice inversible

Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

Si f est bijective, alors $n = p$ et sa bijection réciproque f^{-1} est un endomorphisme de \mathbb{R}^n vérifiant :

$$f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}^n} \text{ et } f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^n}$$

En "passant aux matrices", il vient :

$$\mathcal{M}(f) \cdot \mathcal{M}(f^{-1}) = I_n \text{ et } \mathcal{M}(f^{-1}) \cdot \mathcal{M}(f) = I_n$$

On dira que $\mathcal{M}(f)$ est inversible d'inverse $\mathcal{M}(f^{-1})$:

$$\boxed{(\mathcal{M}(f))^{-1} = \mathcal{M}(f^{-1})}$$



Dans \mathbb{R} , 2 est inversible d'inverse $\frac{1}{2}$ car $2 \times \frac{1}{2} = 1$ et (par commutativité) $\frac{1}{2} \times 2 = 1$.

On note aussi $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Définition (matrice inversible et matrice inverse).

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n$$

Dans ce cas, B est unique, appelée matrice inverse de A et notée A^{-1} .



Une matrice qui n'est pas carrée ne peut pas être inversible



Contrairement à un réel non nul qui est toujours inversible, une matrice carrée non nulle ne l'est pas toujours.
En fait, l'inversibilité d'une matrice traduit la bijectivité de l'application linéaire associée.



1. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2

(b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

(c) Interpréter ce résultat géométriquement.

2. Montrer géométriquement que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Peut-on voir ce dernier résultat à partir de la matrice uniquement?

Définition (déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2).

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Le déterminant de A , noté $\det(A)$ ou $|A|$, est le réel défini par :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Définition (déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3).

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Le déterminant de A est le réel défini par :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$



On a "développé suivant la première ligne" :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

En réalité, on peut développer suivant n'importe quelle ligne ou colonne.



Les signes des coefficients devant les déterminants d'ordre 2 changent :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$



- Développement suivant la 2-ième ligne :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

- Développement suivant la 3-ième colonne :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$



- On choisit la ligne ou la colonne contenant le maximum de 0
- On ne change pas le déterminant en remplaçant une ligne (resp. colonne) par la somme de cette ligne (resp. colonne) et d'une combinaison linéaire des autres. On peut ainsi faire apparaître des zéros, et faciliter le "développement"
- On peut, en généralisant, calculer des déterminants d'ordre supérieur



| Lorsqu'on multiplie une ligne (resp. colonne) par un réel, le déterminant l'est également

Propriété (CNS d'inversibilité - admise).

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.



Etudier l'inversibilité des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Comment peut-on déterminer (lorsqu'elle existe) la matrice inverse ?

2. Détermination pratique de l'inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

Déterminer l'inverse de A revient à résoudre l'équation (matricielle) :

$$AX = B$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et de second membre $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En effet, en multipliant (à gauche) les deux membres par A^{-1} , il vient :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

ce qui fournit :

$$I_n X = A^{-1}B$$

ou encore :

$$X = A^{-1}B$$



| Si $A = \mathcal{M}(f)$, déterminer $A^{-1} = \mathcal{M}(f^{-1})$ revient à déterminer f^{-1} c'est à dire, pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, l'unique $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = b$.



Déterminons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en résolvant l'équation :

$$AX = B$$

d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et de second membre $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

c'est à dire l'équation :

$$\begin{pmatrix} x+z \\ 2x+2y+3z \\ -x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ou encore le système linéaire :

$$\begin{cases} x & & +z & = & a \\ 2x & +2y & +3z & = & b \\ -x & +2y & +z & = & c \end{cases}$$

Pour cela, appliquons la méthode du pivot de Gauss :

On cherche d'abord un système équivalent "échelonné" :

$$\begin{cases} x & +z = a \\ 2x & +2y +3z = b \\ -x & +2y +z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +z = a \\ 2y & +z = -2a+b & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2y & +2z = a+c & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +z = a \\ 2y & +z = -2a+b \\ z & = 3a-b+c & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Ensuite, on résout le système "échelonné" en "remontant" :

$$\begin{cases} x & +z = a \\ 2y & +z = -2a+b \\ z & = 3a-b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +z = a \\ y & = -\frac{5}{2}a+b-\frac{1}{2}c \\ z & = 3a-b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = -2a+b-c \\ y & = -\frac{5}{2}a+b-\frac{1}{2}c \\ z & = 3a-b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

D'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$



Les termes du second membre doivent être bien rangés



On peut présenter la démarche précédente de manière plus "simple" :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$$

3. Application aux changements de bases (nouveau)

Soit E un ev , u un vecteur de E et f un endomorphisme de E .

On considère deux bases de E :

- "l'ancienne" ^[1] $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$
- "la nouvelle" $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$

Se posent alors les questions suivantes :

- Comment obtenir $\mathcal{M}(u, \mathcal{B}')$ à partir de $\mathcal{M}(u, \mathcal{B})$?
- Comment obtenir $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}')$ à partir de $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$?

En général, nous disposons des coordonnées de e'_1, \dots, e'_n dans la base \mathcal{B} :

Définition (matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}').

La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est la donnée en colonnes des coordonnées de e'_1, \dots, e'_n dans la base \mathcal{B} ou encore :

$$P = \mathcal{M}(id, \mathcal{B}', \mathcal{B})$$



! La base au départ est la nouvelle

Propriété (matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B} - évidente).

$P = \mathcal{M}(id, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ est inversible et $P^{-1} = \mathcal{M}(id, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$

Propriété (formule de changement de base pour un vecteur - évidente).

En notant $X = \mathcal{M}(u, \mathcal{B})$ et $X' = \mathcal{M}(u, \mathcal{B}') = \mathcal{M}(id(u), \mathcal{B}')$, on a :

$$X' = P^{-1}X$$



! C'est P^{-1} qui permet d'obtenir les nouvelles coordonnées

Enfin, considérons le diagramme de décomposition suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 E, \mathcal{B} & \xrightarrow[\quad A \quad]{f} & E, \mathcal{B} \\
 \uparrow \text{id} \quad P & & \downarrow P^{-1} \quad \text{id} \\
 E, \mathcal{B}' & \xrightarrow[\quad f \quad]{D} & E, \mathcal{B}'
 \end{array}$$

où $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ et $D = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}')$.

Il exprime :

$$f = id \circ f \circ id$$

ce qui se traduit matriciellement par :

Propriété (formule de changement de base pour une application linéaire - évidente).

En notant $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ et $D = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}')$, on a :

$$D = P^{-1}AP$$

[1]. Il s'agit souvent de la base canonique



Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère la famille formée des vecteurs :

$$e'_1 = (1, 2, -1), e'_2 = (0, 2, 2) \text{ et } e'_3 = (1, 3, 1)$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la matrice de f dans cette nouvelle base.



- L'intérêt est de "simplifier" la matrice de f
- Dans le parcours "Informatique avancée", nous verrons comment choisir une telle base (diagonalisation)
- **Pour montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de \mathbb{R}^3 on peut :**
 - **soit montrer que la famille est génératrice en montrant qu'elle est de rang 3** (pivot de Gauss sur les colonnes)
 - **soit montrer que la famille est libre**
 - **soit en résolvant un système linéaire** (pivot de Gauss sur les lignes)
 - **soit en montrant que le déterminant de la famille** (mettre les coordonnées en colonne) **est non nul** (pourquoi?)

Chapitre B

La diagonalisation

Sommaire

I. Éléments propres d'un endomorphisme	19
II. Polynôme caractéristique d'une matrice	20
III. Diagonalisation d'une matrice	21
1. Diagonaliser une matrice diagonalisable	21
2. Conditions de diagonalisabilité	22
3. Exemples	23
IV. Applications de la diagonalisation	23
1. Puissance d'une matrice diagonalisable	23
2. Suites "géométriques" de matrices	23
3. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ou 3	24

I. Éléments propres d'un endomorphisme



Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère une nouvelle base de \mathbb{R}^3 formée des vecteurs :

$$(1, 2, -1), (0, 2, 2) \text{ et } (1, 3, 1)$$

La matrice de f dans la nouvelle base est donc :

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'endomorphisme f associé à la matrice A .
2. Exprimer les images des vecteurs de la nouvelle base.

Définition (valeur propre, vecteur propre).

On dit qu'un réel λ est **valeur propre** de f s'il existe un vecteur non nul $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(u) = \lambda u$.

Dans ce cas, tout vecteur non nul $u \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $f(u) = \lambda u$ est appelé **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ



- $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow (f - \lambda id)(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \text{Ker}(f - \lambda id)$
- λ est valeur propre de f si et seulement si $\text{Ker}(f - \lambda id) \neq \{0\}$
- si λ est valeur propre de f , alors $\text{Ker}(f - \lambda id)$ est constitué des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ et du vecteur nul.



Le vecteur nul n'est jamais vecteur propre de f

Définition (sous-espace propre).

Si λ est une valeur propre de f , $\text{Ker}(f - \lambda id)$ est appelé sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ , et noté E_λ



- E_λ est un sev de \mathbb{R}^n dont la dimension est supérieure (ou égale) à 1
- Pour déterminer E_λ , on résout l'équation (vectorielle) d'inconnue u :

$$(f - \lambda id)(u) = 0$$

c'est à dire l'équation (matricielle) d'inconnue $X = \mathcal{M}(u)$:

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

ou encore le système d'équations linéaires associé ^a

a. Par la méthode du pivot de Gauss



Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base can. est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Montrer que A n'est pas inversible.
 - En déduire que 0 est valeur propre de f .
 - Déterminer le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0.
- Montrer que $(1, 3, 1)$ est un vecteur propre de f .
 - Déterminer le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1.

II. Polynôme caractéristique d'une matrice

Retour sur la deuxième remarque à propos des valeurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } f &\Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda id) \neq \{0\} \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda id) \text{ non injective} \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda id) \text{ non bijective} \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0 \end{aligned}$$

Définition (polynôme caractéristique).

$\det(A - \lambda I_n)$ est un polynôme en λ de degré n , appelé polynôme caractéristique de A , et noté $\chi_A(\lambda)$.

Propriété (lien entre valeurs propres de f et racines du polynôme caractéristique de A).

Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme $\chi_A(\lambda)$.

Définition (ordre de multiplicité d'une valeur propre).

On dit que la valeur propre λ_0 de f est d'ordre (de multiplicité) $p \in \mathbb{N}^*$, et on note $m(\lambda_0) = p$, s'il existe un polynôme Q tel que :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^p Q(\lambda) \text{ avec } Q(\lambda_0) \neq 0$$



Pour étudier les valeurs propres de f , on commence par calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda)$, puis on le factorise pour déterminer les valeurs propres de f ainsi que leur ordre (de multiplicité)

Propriété (dimension d'un sous-espace propre).

Si λ est une valeur propre de f , alors $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m(\lambda)$.



Pour chacune des matrices suivantes :

1. Calculer le polynôme caractéristique.
2. Le factoriser pour déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme (canoniquement) associé, et leur ordre.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

III. Diagonalisation d'une matrice

1. Diagonaliser une matrice diagonalisable

Définition (matrice diagonalisable).

On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$D = P^{-1}AP$$



On reconnaît la formule de changement de bases :

- D est la matrice de f dans la nouvelle base qui est formée de vecteurs propres de f
- La diagonale de D est donc constituée des valeurs propres de f , chaque valeur propre apparaissant autant de fois que son ordre
- P est la matrice de passage de la base canonique vers cette nouvelle base formée de vecteurs propres de f
- Les colonnes de P sont donc constituées des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres sur la diagonale de D , dans le même ordre!

Définition (diagonaliser une matrice (diagonalisable)).

Diagonaliser une matrice (diagonalisable), c'est déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$D = P^{-1}AP$$

Pour diagonaliser une matrice (diagonalisable)

1. On calcule le polynôme caractéristique de A
2. On le factorise pour déterminer les valeurs propres de f et leur ordre
3. On détermine^a les sous-espaces propres de f
4. On "réunit" les bases de chaque sous-espace propre de f pour obtenir la nouvelle base formée de vecteurs propres de f , et donc la donnée de P en colonnes
5. On forme enfin la diagonale de D en mettant, dans le bon ordre, les valeurs propres de f

a. en résolvant des systèmes linéaires à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

2. Conditions de diagonalisabilité

Propriété (CNS (théorique) de diagonalisabilité).

A est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de f .

Propriété (CNS (pratique) de diagonalisabilité).

A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à n .



Il faut et il suffit que la somme des ordres de toutes les valeurs propres de f soit égale à n ET que la dimension de chaque sous-espace propre de f coïncide avec l'ordre de la valeur propre associée.

Propriété (CS (pratique) de diagonalisabilité).

Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Pour étudier la diagonalisabilité d'une matrice

- On exécute les instructions 1 et 2 de la diagonalisation
- Si le nombre de valeurs propres, comptées avec leur ordre, n'est pas égal à n , alors A n'est pas diagonalisable
- Sinon,
 - Si toutes les valeurs propres sont simples, alors A est diagonalisable
 - Sinon,
 - On répète, jusqu'à épuisement des valeurs propres multiples^a ou rencontre d'une dimension "trop petite", la recherche de sous-espace propre et la comparaison de la dimension avec l'ordre de la valeur propre associée
 - Si toutes les dimensions coïncident, alors A est diagonalisable
 - Sinon, A n'est pas diagonalisable

a. les valeurs propres simples remplissent toujours la condition. Savez-vous pourquoi?

3. Exemples



Pour chacune des matrices suivantes :

1. Etudier la diagonalisabilité.
2. Lorsque cela est possible, diagonaliser.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

IV. Applications de la diagonalisation

1. Puissance d'une matrice diagonalisable



On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On sait déjà que A est diagonalisable et que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On veut calculer A^n ...

Le calcul repose sur le fait ^a que $A^n = PD^nP^{-1}$:

- On calcule D^n (on élève les coefficients diagonaux à la puissance n)
- On multiplie les trois matrices P , D^n et P^{-1}

a. se démontre par récurrence sur n



| Résoudre le problème.

2. Suites "géométriques" de matrices

Propriété (rappel sur les suites géométriques de réels).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n \end{cases} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

Il s'agit de la suite géométrique de raison a et de premier terme u_0 .

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 a^n$.



On considère les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = -x_n + y_n - z_n \\ z_{n+1} = -x_n - y_n + z_n \end{cases} \end{cases}$$

On cherche à exprimer x_n, y_n, z_n en fonction de n et de x_0, y_0, z_0 ...

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n \end{cases}$$

On cherche alors à exprimer U_n en fonction de n et de U_0 ...

Par récurrence, on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$$

ce qui nous ramène au calcul de A^n ...



Résoudre le problème pour $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 1$.

3. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ou 3



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

On cherche à exprimer u_n en fonction de n et de u_0, u_1 ...

En notant $x_n = u_n$ et $y_n = u_{n+1}$, on a :

$$\begin{cases} x_0, y_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = x_n + 4y_n \end{cases} \end{cases}$$

ce qui nous ramène au problème précédent...



Résoudre le problème pour $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.