M4202C - Algèbre linéaire ++
Cours 1 - Rappels et changements de bases

2021/2022 - A. Ridard

Vannes
iut
Université Bretagne Sud

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - l'icône en dessous du logo IUT
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

Plan du cours

1. Matrices en algèbre linéaire
2. Espace vectoriel des matrices
3. Multiplication matricielle
4. Inversion de matrices

On considère deux ev E et F munis respectivement des bases :

$$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n) \text{ et } \mathscr{B}' = (f_1, \ldots, f_p)$$

Nous savons qu'un vecteur $u \in E$ est déterminé de manière unique par ses coordonnées $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Définition (matrice d'un vecteur)

On appelle matrice du vecteur u dans la base $\mathscr{B}$,notée $\mathscr{M}(u, \mathscr{B})$, la matrice "colonne" formée des coordonnées de u dans $\mathscr{B}$:

$$\mathscr{M}(u, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Cette matrice dépend évidemment de la base choisie

On notera simplement $\mathscr{M}(u)$ s'il s'agit de la base canonique ou s'il n'y a pas d'ambiguïté concernant la base

Nous savons également qu'une application linéaire f de E dans F est entièrement déterminée par les images $f(e_1),\ldots,f(e_n)$.

De plus, les vecteurs $f(e_i)\in F$ sont déterminés de manière unique par leurs coordonnées $\alpha_{1i},\ldots,\alpha_{pi}$ dans la base $\mathscr{B}'$.

Définition (matrice d'une application linéaire)

On appelle matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathscr{B},\mathscr{B}'$, notée $\mathscr{M}(f,\mathscr{B},\mathscr{B}')$, la matrice formée, en colonnes, des coordonnées de $f(e_1),\ldots,f(e_n)$ dans $\mathscr{B}'$:

$$\mathscr{M}(f,\mathscr{B},\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{p1} & \ldots & \alpha_{pn} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})_{1\le i\le p, 1\le j\le n}$$

Cette matrice dépend évidemment des bases choisies

On notera simplement $\mathscr{M}(f)$ s'il s'agit des bases canoniques ou s'il n'y a pas d'ambiguïté concernant les bases

- Soit f l'application linéaire définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x-y+z, 2x+2y+6z+4t, -x-2z-t) \end{array}$$

  Sa matrice est $\mathcal{M}(f) = \ldots$

- Soit φ la forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+2y-z \end{array}$$

  Sa matrice "ligne" est $\mathcal{M}(\varphi) = \ldots$

- Soit p la projection orthogonale sur $Vect((1,0))$ définie par :

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

  Sa matrice est $\mathcal{M}(p) = \ldots$

- Soit s la symétrie orthogonale par rapport à $Vect((1,0))$ définie par :

$$s: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,-y) \end{array}$$

  Sa matrice est $\mathcal{M}(s) = \ldots$

- Soit h l'homothétie définie par :

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \lambda(x,y) \end{array} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

  Sa matrice est $\mathcal{M}(h) = \ldots$

Si $\lambda = 1$, l'homothétie est en fait l'application identité, et sa matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est appelée matrice identité d'ordre 2.

On sait additionner deux applications linéaires f, g de E dans F :

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$$

On aimerait additionner leurs matrices de sorte que :

$$\boxed{\mathscr{M}(f) + \mathscr{M}(g) = \mathscr{M}(f+g)}$$

⚠ Les bases choisies doivent être les mêmes pour f et g

En fait, il suffit d'additionner les matrices terme à terme...

Définition (addition de matrices)

L'addition de deux matrices de même taille [a] $p \times n$ est définie par :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}+b_{p1} & \dots & a_{pn}+b_{pn} \end{pmatrix}$$

a. Elles doivent avoir le même nombre de lignes p et le même nombre de colonnes n

On sait aussi multiplier par $\lambda \in \mathbb{R}$ une application linéaire f de E dans F :

$$\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$$

On aimerait aussi multiplier par $\lambda \in \mathbb{R}$ sa matrice de sorte que :

$$\boxed{\lambda \mathscr{M}(f) = \mathscr{M}(\lambda f)}$$

En fait, il suffit de multiplier par λ chaque coefficient de la matrice...

Définition (multiplication par un réel)

La multiplication par $\lambda \in \mathbb{R}$ d'une matrice de taille $p \times n$ est définie par :

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{p1} & \dots & \lambda a_{pn} \end{pmatrix}$$

Soit p la projection orthogonale sur $Vect((1,0))$ définie par :

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

1. Déterminer la matrice de $2p - id$ où id désigne l'application identité.
2. En déduire que $2p - id = s$ où s désigne la symétrie orthogonale par rapport à $Vect((1,0))$
3. Illustrer ce résultat à l'aide d'un dessin.

Vannes
Université Bretagne Sud

Propriété : admise

- L'ensemble des matrices de taille $p\times n$, noté $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, est un ev.
- Les matrices E_{ij} $(1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n)$, où tous les coefficients sont nuls sauf e_{ij} qui vaut 1, forment la base canonique de l'ev $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ qui est donc de dimension pn.
- $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ est isomorphe à $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ via l'isomorphisme défini par :

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \mathscr{M}(f) \end{array}$$

- L'ensemble des matrices "carrées" de taille $n\times n$ est noté simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De telles matrices sont dites d'ordre n.
- La base canonique de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est $(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ avec :

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \text{ et } E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

- ϕ est une application linéaire par définition des opérations sur les matrices !
- ϕ est bijective car, étant donnée une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ dont la matrice (dans les bases canoniques) est A. Plus précisément, cette unique **application linéaire associée à** A, est définie par :

$$f((1,0,\ldots,0)) = (a_{11},\ldots,a_{p1}),\ldots,f((0,\ldots,0,1)) = (a_{1n},\ldots,a_{pn})$$

⚠ **Un vecteur de $\mathbb{R}^p$ se note toujours en ligne, c'est sa matrice qui est en colonne (évitons les abus)**.

- En fait, cet isomorphisme "naturel" permet de transformer un problème d'algèbre linéaire (de dimension finie) en un problème matriciel dont la résolution est plus pratique [a] !

a. On peut par exemple utiliser la structure de tableaux dans les implémentations

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'application linéaire associée f.
2. De quelle transformation du plan s'agit-il (faire un dessin) ?
3. Déterminer la matrice de la rotation d'angle θ (faire un dessin).

Se posent alors les questions suivantes :

- Comment déterminer matriciellement l'image d'un vecteur par une appl. linéaire ?
- Comment déterminer la matrice de la composée de deux applications linéaires ?

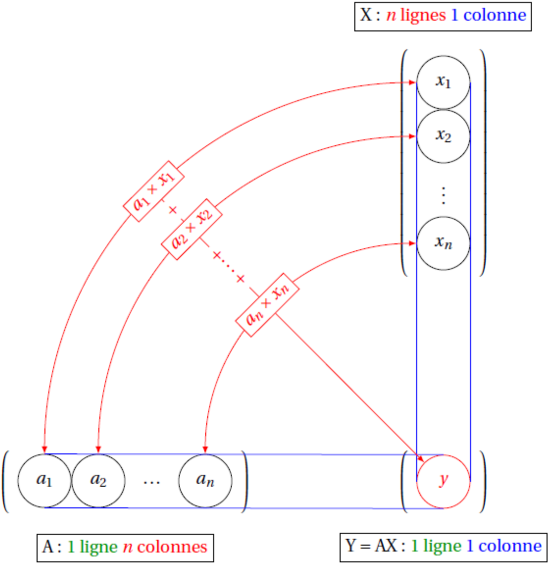
Soit φ la forme linéaire de $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x=(x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & a_1x_1+\cdots+a_nx_n \end{array} \qquad \text{avec } a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$$

Sa matrice "ligne" est $\mathscr{M}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$.

Comment déterminer $\varphi(x) = a_1x_1+\cdots+a_nx_n$ à partir des matrices

$\mathscr{M}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$ et $\mathscr{M}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$?

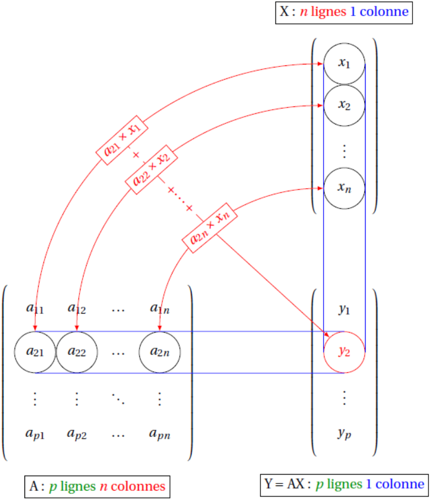

X : n lignes 1 colonne
x_1
x_2
$\vdots$
x_n
$a_1 \times x_1$
+
$a_2 \times x_2$
$+ \dots +$
$a_n \times x_n$
a_1
a_2
$\dots$
a_n
y
A : 1 ligne n colonnes
Y = AX : 1 ligne 1 colonne

Soit φ la forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ associée à la matrice "ligne" $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer matriciellement $\varphi(u)$ avec $u = (1,2,3)$.

Soit maintenant $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

La matrice de f ayant p lignes, en répétant ce qui précède pour chaque ligne, on obtient en fait la matrice "colonne" de $f(x)$:



Soit f l'application linéaire associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer matriciellement $f(u)$ avec $u = (1, 2, -1, -2)$.

En fait, on vient de définir le produit AX avec :

$$A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \text{ et } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

De plus, si A est la matrice de l'application linéaire f et X celle du vecteur x, alors AX sera celle du vecteur $f(x)$:

$$\boxed{\mathcal{M}(f)\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}(f(x))}$$

Vous noterez que la matrice $Y = AX$ est bien dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

On sait composer deux applications linéaires $f : E \to F$ et $g : D \to E$:

$$fog : x \mapsto f(g(x))$$

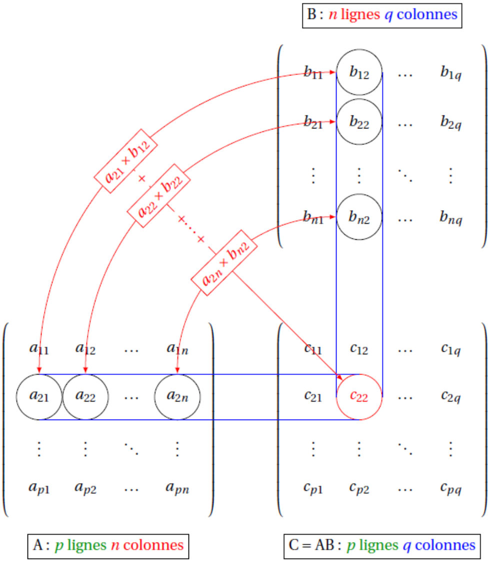
On aimerait multiplier leurs matrices de sorte que :

$$\boxed{\mathcal{M}(f)\mathcal{M}(g) = \mathcal{M}(fog)}$$

⚠

- Les bases à l'arrivée de g et au départ de f doivent être les mêmes

En fait, il suffit de généraliser ce qui précède...


B : n lignes q colonnes
a21 × b12
+
a22 × b22
+ ... +
a2n × bn2
A : p lignes n colonnes
C = AB : p lignes q colonnes

- La multiplication matricielle ne se fait pas terme à terme [a]
- Elle n'est pas commutative :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mais } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comment peut-on interpréter ce résultat géométriquement ?

a. Ce produit existe, il est appelé produit d'Hadamard et est utilisé, par exemple, pour les filtres en traitement d'images ou pour caractériser l'anti-symétrie d'une relation dans un ensemble à partir de la matrice d'adjacence

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Si f est bijective, alors $n = p$ et sa bijection réciproque f^{-1} est un end. de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$fof^{-1} = id_{\mathbb{R}^n} \text{ et } f^{-1}of = id_{\mathbb{R}^n}$$

En "passant aux matrices", il vient :

$$\mathscr{M}(f)\mathscr{M}(f^{-1}) = I_n \text{ et } \mathscr{M}(f^{-1})\mathscr{M}(f) = I_n$$

On dira que $\mathscr{M}(f)$ est inversible d'inverse $\mathscr{M}(f^{-1})$:

$$\boxed{\left(\mathscr{M}(f)\right)^{-1} = \mathscr{M}(f^{-1})}$$

Dans $\mathbb{R}$, 2 est inversible d'inverse $\frac{1}{2}$ car $2 \times \frac{1}{2} = 1$ et (par commutativité) $\frac{1}{2} \times 2 = 1$.

On note aussi $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Définition (matrice inversible et matrice inverse)

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n$$

Dans ce cas, B est unique, appelée matrice inverse de A et notée A^{-1}.

Une matrice qui n'est pas carrée ne peut pas être inversible

Contrairement à un réel non nul qui est toujours inversible, une matrice carrée non nulle ne l'est pas toujours.
En fait, l'inversibilité d'une matrice traduit la bijectivité de l'application linéaire associée.

1. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   1. Calculer A^2
   2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
   3. Interpréter ce résultat géométriquement.
2. Montrer géométriquement que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Peut-on voir ce dernier résultat à partir de la matrice uniquement ?

Définition (déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Le déterminant de A, noté $det(A)$ ou $|A|$, est le réel défini par :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

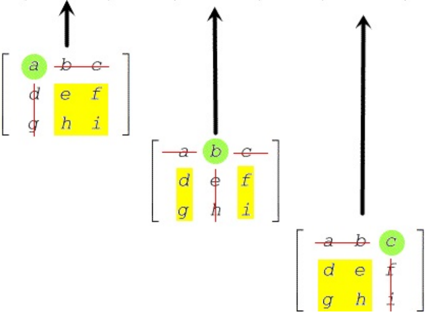
Définition (déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Le déterminant de A est le réel défini par :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

On a "développé suivant la première ligne" :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$



En réalité, on peut développer suivant n'importe quelle ligne ou colonne.

Les signes des coefficients devant les déterminants d'ordre 2 changent :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

- Développement suivant la 2-ième ligne :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

- Développement suivant la 3-ième colonne :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

- On choisit la ligne ou la colonne contenant le maximum de 0
- On ne change pas le déterminant en remplaçant une ligne (resp. colonne) par la somme de cette ligne (resp. colonne) et d'une combinaison linéaire des autres. On peut ainsi faire apparaître des zéros, et faciliter le "développement"
- On peut, en généralisant, calculer des déterminants d'ordre supérieur

Lorsqu'on multiplie une ligne (resp. colonne) par un réel, le déterminant l'est également

Propriété : CNS d'inversibilité - admise

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Etudier l'inversibilité des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Comment peut-on déterminer (lorsqu'elle existe) la matrice inverse ?

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

Déterminer l'inverse de A revient à résoudre l'équation (matricielle) :

$$AX = B$$

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et de second membre $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En effet, en multipliant (à gauche) les deux membres par A^{-1}, il vient :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

ce qui fournit :

$$I_n X = A^{-1}B$$

ou encore :

$$X = A^{-1}B$$

Si $A = \mathscr{M}(f)$, déterminer $A^{-1} = \mathscr{M}(f^{-1})$ revient à déterminer f^{-1} c'est à dire, pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, l'unique $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = b$.

Déterminons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en résolvant l'équation :

$$AX = B$$

d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et de second membre $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
c'est à dire l'équation :

$$\begin{pmatrix} x+z \\ 2x+2y+3z \\ -x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ou encore le système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & & +z & = & a \\ 2x & +2y & +3z & = & b \\ -x & +2y & +z & = & c \end{array} \right.$$

Pour cela, appliquons la méthode du pivot de Gauss :
On cherche d'abord un système équivalent "échelonné" :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \boxed{x} & & +z & = & a \\ 2x & +2y & +3z & = & b \\ -x & +2y & +z & = & c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} x & & +z & = & a & \\ & \boxed{2y} & +z & = & -2a+b & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & 2y & +2z & = & a+c & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccc} x & & +z & = & a & & & \\ & 2y & +z & = & -2a & +b & & \\ & & z & = & 3a & -b & +c & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

Ensuite, on résout le système "échelonné" en "remontant" :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & +z & = & a & & \\ & 2y & +z & = & -2a & +b & \\ & & z & = & 3a & -b & +c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccc} x & & +z & = & a & & \\ & y & & = & -\frac{5}{2}a & +b & -\frac{1}{2}c \\ & & z & = & 3a & -b & +c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccc} x & & & = & -2a & +b & -c \\ & y & & = & -\frac{5}{2}a & +b & -\frac{1}{2}c \\ & & z & = & 3a & -b & +c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

D'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Les termes du second membre doivent être bien rangés

On peut présenter la démarche précédente de manière plus "simple" :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$$

Soit E un ev, u un vecteur de E et f un endomorphisme de E.

On considère deux bases de E :

- "l'ancienne" [1] $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$
- "la nouvelle" $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$

Se posent alors les questions suivantes :

- Comment obtenir $\mathscr{M}(u, \mathscr{B}')$ à partir de $\mathscr{M}(u, \mathscr{B})$?
- Comment obtenir $\mathscr{M}(f, \mathscr{B}')$ à partir de $\mathscr{M}(f, \mathscr{B})$?

1. Il s'agit souvent de la base canonique

En général, nous disposons des coordonnées de $e'_1,\ldots,e'_n$ dans la base $\mathscr{B}$:

Définition (matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$)

La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est la donnée en colonnes des coordonnées de $e'_1,\ldots,e'_n$ dans la base $\mathscr{B}$ ou encore :

$$P = \mathscr{M}(id, \mathscr{B}', \mathscr{B})$$

⚠ La base au départ est la nouvelle

Propriété : matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$ - évidente

$P = \mathscr{M}(id, \mathscr{B}', \mathscr{B})$ est inversible et $P^{-1} = \mathscr{M}(id, \mathscr{B}, \mathscr{B}')$

Propriété : formule de changement de base pour un vecteur - évidente

En notant $X = \mathscr{M}(u, \mathscr{B})$ et $X' = \mathscr{M}(u, \mathscr{B}') = \mathscr{M}(id(u), \mathscr{B}')$, on a :

$$X' = P^{-1}X$$

C'est P^{-1} qui permet d'obtenir les nouvelles coordonnées

Enfin, considérons le diagramme de décomposition suivant :

$$\begin{tikzcd}
E,\mathscr{B} \arrow[r, "f", "A"'] & E,\mathscr{B} \arrow[d, "P^{-1}"', "id"] \\
E,\mathscr{B}' \arrow[u, "id", "P"'] \arrow[r, "D", "f"'] & E,\mathscr{B}'
\end{tikzcd}$$

où $A = \mathscr{M}(f, \mathscr{B})$ et $D = \mathscr{M}(f, \mathscr{B}')$.

Il exprime :

$$f = id \, o \, f \, o \, id$$

ce qui se traduit matriciellement par :

Propriété : formule de changement de base pour une application linéaire - évidente

En notant $A = \mathscr{M}(f, \mathscr{B})$ et $D = \mathscr{M}(f, \mathscr{B}')$, on a :

$$D = P^{-1} A P$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère la famille formée des vecteurs :

$$e'_1 = (1,2,-1), e'_2 = (0,2,2) \text{ et } e'_3 = (1,3,1)$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans cette nouvelle base.

- L'intérêt est de "simplifier" la matrice de f
- Dans le parcours "Informatique avancée", nous verrons comment choisir une telle base (diagonalisation)
- Pour montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ on peut :
  - soit montrer que la famille est génératrice en montrant qu'elle est de rang 3 (pivot de Gauss sur les colonnes)
  - soit montrer que la famille est libre
    - soit en résolvant un système linéaire (pivot de Gauss sur les lignes)
    - soit en montrant que le déterminant de la famille (mettre les coordonnées en colonne) est non nul (pourquoi ?)