M4202C - Algèbre linéaire ++
Cours 2 - Diagonalisation

2021/2022 - A. Ridard

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - l'icône en dessous du logo IUT
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

Plan du cours

On considère A une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$.
On note f l'endomorphisme (canoniquement) associé à A.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs :

$$(1,2,-1),(0,2,2) \text{ et } (1,3,1)$$

La matrice de f dans la nouvelle base est donc :

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'endomorphisme f associé à la matrice A.
2. Exprimer les images des vecteurs de la nouvelle base.

Définition (valeur propre, vecteur propre)

On dit qu'un réel λ est **valeur propre** de f s'il existe un vecteur non nul $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(u) = \lambda u$.

Dans ce cas, tout vecteur non nul $u \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $f(u) = \lambda u$ est appelé **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ.

- $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow (f - \lambda id)(u) = 0 \Leftrightarrow u \in Ker(f - \lambda id)$
- λ est valeur propre de f si et seulement si $Ker(f - \lambda id) \neq \{0\}$
- si λ est valeur propre de f, alors $Ker(f - \lambda id)$ est constitué des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ **et** du vecteur nul.

Le vecteur nul n'est jamais vecteur propre de f

Définition (sous-espace propre)

Si λ est une valeur propre de f, $Ker(f-\lambda id)$ est appelé sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ, et noté E_λ.

- E_λ est un sev de $\mathbb{R}^n$ dont la dimension est supérieure (ou égale) à 1
- Pour déterminer E_λ, on résout l'équation (vectorielle) d'inconnue u :

$$(f-\lambda id)(u)=0$$

c'est à dire l'équation (matricielle) d'inconnue $X=\mathscr{M}(u)$:

$$(A-\lambda I_n)X=0$$

ou encore le système d'équations linéaires associé [a]

a. Par la méthode du pivot de Gauss

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base can. est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. - Montrer que A n'est pas inversible.
   - En déduire que 0 est valeur propre de f.
   - Déterminer le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0.
2. - Montrer que $(1,3,1)$ est un vecteur propre de f.
   - Déterminer le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1.

Retour sur la deuxième remarque à propos des valeurs propres :

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } f \quad & \Leftrightarrow \quad Ker(f-\lambda id) \neq \{0\} \\
& \Leftrightarrow \quad (f-\lambda id) \text{ non injective} \\
& \Leftrightarrow \quad (f-\lambda id) \text{ non bijective} \\
& \Leftrightarrow \quad (A-\lambda I_n) \text{ non inversible} \\
& \Leftrightarrow \quad det(A-\lambda I_n) = 0
\end{aligned}$$

Définition (polynôme caractéristique)

$det(A-\lambda I_n)$ est un polynôme en λ de degré n, appelé polynôme caractéristique de A, et noté $\chi_A(\lambda)$.

Propriété : lien entre valeurs propres de f et racines du polynôme caractéristique de A

Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme $\chi_A(\lambda)$.

Définition (ordre de multiplicité d'une valeur propre)

On dit que la valeur propre λ_0 de f est d'ordre (de multiplicité) $p \in \mathbb{N}^*$, et on note $m(\lambda_0) = p$, s'il existe un polynôme Q tel que :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^p Q(\lambda) \text{ avec } Q(\lambda_0) \neq 0$$

Pour étudier les valeurs propres de f, on commence par calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda)$, puis on le factorise pour déterminer les valeurs propres de f ainsi que leur ordre (de multiplicité)

Propriété : dimension d'un sous-espace propre

Si λ est une valeur propre de f, alors $1 \leq dim(E_\lambda) \leq m(\lambda)$.

Pour chacune des matrices suivantes :

1. Calculer le polynôme caractéristique.
2. Le factoriser pour déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme (canoniquement) associé, et leur ordre.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Définition (matrice diagonalisable)

On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$D = P^{-1}AP$$

On reconnaît la formule de changement de bases :

- D est la matrice de f dans la nouvelle base qui est formée de vecteurs propres de f
- La diagonale de D est donc constituée des valeurs propres de f, chaque valeur propre apparaissant autant de fois que son ordre
- P est la matrice de passage de la base canonique vers cette nouvelle base formée de vecteurs propres de f
- Les colonnes de P sont donc constituées des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres sur la diagonale de D, dans le même ordre !

Définition (diagonaliser une matrice (diagonalisable))

Diagonaliser une matrice (diagonalisable), c'est déterminer une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$D = P^{-1}AP$$

Pour diagonaliser une matrice (diagonalisable)

1. On calcule le polynôme caractéristique de A
2. On le factorise pour déterminer les valeurs propres de f et leur ordre
3. On détermine[a] les sous-espaces propres de f
4. On "réunit" les bases de chaque sous-espace propre de f pour obtenir la nouvelle base formée de vecteurs propres de f, et donc la donnée de P en colonnes
5. On forme enfin la diagonale de D en mettant, dans le bon ordre, les valeurs propres f

a. en résolvant des systèmes linéaires à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

Vannes
Université Bretagne Sud

Propriété : CNS (théorique) de diagonalisabilité

A est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.

Propriété : CNS (pratique) de diagonalisabilité

A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à n.

Il faut et il suffit que la somme des ordres de toutes les valeurs propres de f soit égale à n ET que la dimension de chaque sous-espace propre de f coïncide avec l'ordre de la valeur propre associée.

Propriété : CS (pratique) de diagonalisabilité

Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Pour étudier la diagonalisabilité d'une matrice

- On exécute les instructions 1 et 2 de la diagonalisation
- Si le nombre de valeurs propres, comptées avec leur ordre, n'est pas égal à n, alors A n'est pas diagonalisable
- Sinon,
  - Si toutes les valeurs propres sont simples, alors A est diagonalisable
  - Sinon,
    - On répète, jusqu'à épuisement des valeurs propres multiples [a] ou rencontre d'une dimension "trop petite", la recherche de sous-espace propre et la comparaison de la dimension avec l'ordre de la valeur propre associée
    - Si toutes les dimensions coïncident, alors A est diagonalisable
    - Sinon, A n'est pas diagonalisable

a. les valeurs propres simples remplissent toujours la condition. Savez-vous pourquoi ?

Pour chacune des matrices suivantes :

1. Etudier la diagonalisabilité.
2. Lorsque cela est possible, diagonaliser.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On sait déjà que A est diagonalisable et que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On veut calculer A^n...

Le calcul repose sur le fait [a] que $A^n = PD^nP^{-1}$:

- On calcule D^n (on élève les coefficients diagonaux à la puissance n)
- On multiplie les trois matrices P, D^n et P^{-1}

a. se démontre par récurrence sur n

Résoudre le problème.

Propriété : rappel sur les suites géométriques de réels

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n \end{cases} \qquad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

Il s'agit de la suite géométrique de raison a et de premier terme u_0.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 a^n$.

On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R} & \\ \forall n \in \mathbb{N}, & x_{n+1} = 3x_n + y_n + z_n \\ & y_{n+1} = -x_n + y_n - z_n \\ & z_{n+1} = -x_n - y_n + z_n \end{array}\right.$$

On cherche à exprimer x_n, y_n, z_n en fonction de n et de x_0, y_0, z_0...

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} U_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n \end{array}\right.$$

On cherche alors à exprimer U_n en fonction de n et de U_0...

Par récurrence, on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0$$

ce qui nous ramène au calcul de A^n...

Résoudre le problème pour $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 1$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

On cherche à exprimer u_n en fonction de n et de u_0, u_1...

En notant $x_n = u_n$ et $y_n = u_{n+1}$, on a :

$$\begin{cases} x_0, y_0 \in \mathbb{R} & \\ \forall n \in \mathbb{N}, & x_{n+1} = y_n \\ & y_{n+1} = x_n + 4y_n \end{cases}$$

ce qui nous ramène au problème précédent...

Résoudre le problème pour $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.