M4202C - Algèbre linéaire ++

TD 1 - Rappels et changements de bases

2021/2022 - A. Ridard

Exercice 1.
On considère $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire définie par :

- $f(e_1) = 3e_1 + 4e_2 - 2e_3$
- $f(e_2) = -e_1 - e_2 + e_3$
- $f(e_3) = e_1 + 2e_2$

On pose $g = f - id$ où id désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$.
2. Déterminer les images et les noyaux de f et g, puis les comparer.
3. Trouver une base $\mathscr{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :
$$f(\epsilon_1) = 0,\ f(\epsilon_2) = \epsilon_2 \text{ et } f(\epsilon_3) = \epsilon_3$$
4. Déterminer $\mathscr{M}(f, \mathscr{B})$ et $\mathscr{M}(f, \mathscr{B}')$.

Exercice 2.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'image d'un vecteur quelconque (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $Ker(f)$.

Exercice 3.
On considère les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

1. A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
2. Même question avec B.
3. Même question avec C. *On pourra effectuer la transformation, dans le calcul du déterminant,* $C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2$.

Exercice 4.
On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à $A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ définis par :
$$u = (2, -1, -2),\ v = (1, 0, -1),\ w = (-2, 1, 3)$$

1. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On notera $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = (u, v, w)$.
2. Déterminer P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ (attention à l'ordre), puis la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.
3. En déduire l'écriture (unique) du vecteur $(1, 2, 3)$ comme combinaison linéaire de u, v, w.
4. A partir du diagramme de décomposition de f, déterminer $D = \mathscr{M}(f, \mathscr{B}')$.