M4202C - Algèbre linéaire ++
TD 2 - Diagonalisation

2021/2022 - A. Ridard

Exercice 1.
On considère la matrice $M(a) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ a & 2a & -a \\ -a & -a & a+1 \end{pmatrix}$$

En la notant simplement M pour ne pas alourdir les notations, on admet que son polynôme caractéristique est :

$$\chi_M(\lambda) = -\left(\lambda - a\right)^2 \left(\lambda - (a+1)\right)$$

1. **Cas où $a = 2$.**
   On note $A = M(2)$.
   (a) Donner les valeurs propres de A en précisant bien l'ordre de multiplicité.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, diagonaliser A en rangeant les valeurs propres dans l'ordre croissant.
2. **Cas où $a = 1$.**
   On note $B = M(1)$.
   (a) Donner les valeurs propres de B en précisant bien l'ordre de multiplicité.
   (b) La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, diagonaliser B en rangeant les valeurs propres dans l'ordre croissant.

Exercice 2.
On considère les matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les produits matriciels AB et BC.
2. En déduire les valeurs propres de A en précisant bien l'ordre de multiplicité, puis les sous-espaces propres associés.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, diagonaliser A.
4. Déterminer explicitement les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1, y_0 = -1, z_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= 6x_n - 2y_n + 2z_n \\ y_{n+1} &= -2x_n + 5y_n \\ z_{n+1} &= 2x_n + 7z_n \end{aligned} \end{cases}$$