

BUT Informatique

Année universitaire 2022 / 2023

R1.07 – Outils fondamentaux


Responsable : A. Ridard


Autres intervenants : R. Fleurquin et T. Godin




Avant-propos

Ce document est spécifiquement rédigé pour des séances de Cours/TD.

Il présente les éléments de cours habituels (définitions et propriétés) enrichis de remarques, indiquées par , donnant un certain éclairage pour mieux les comprendre, les retenir et les utiliser.

Ce cours est aussi ponctué d'exercices, indiqués par , qui seront traités en classe ou à la maison pour bien assimiler les différentes notions présentées. Grâce à ces exercices, vous allez fabriquer les exemples du cours ainsi que certaines preuves. C'est effectivement en étant acteur dans ses apprentissages que l'on profite au mieux des enseignements!

Vous trouverez également des méthodes mises en œuvre, indiquées par , qui correspondent à des savoirs-faire incontournables.

Ce document sera complété par des feuilles de TD ou TP pour s'entraîner d'avantage.

Bonne lecture, et bon travail...

Table des matières

A Du calcul numérique au calcul vectoriel	7
I. Du calcul numérique au calcul algébrique	7
1. Le calcul numérique	7
2. Le calcul algébrique <i>élémentaire</i>	8
3. Le calcul algébrique <i>général</i>	8
II. Le calcul vectoriel	9
1. Dans le plan \mathbb{R}^2	9
2. Dans l'espace \mathbb{R}^3	11
3. Dans l'espace (vectoriel) \mathbb{R}^n	13
4. L'espace vectoriel : une structure algébrique adaptée à la géométrie	14
B Le calcul matriciel en algèbre linéaire	17
I. Le calcul matriciel	17
1. Les matrices	17
2. L'addition (interne) et la multiplication (externe) par un réel	19
3. La multiplication matricielle	19
4. L'inversion de matrice	21
II. L'interprétation en algèbre linéaire	25
1. Les matrices en algèbre linéaire	25
2. Interprétation de la multiplication matricielle	28
3. Les formules de changements de bases (hors programme)	28

Chapitre A

Du calcul numérique au calcul vectoriel

Sommaire

I. Du calcul numérique au calcul algébrique	7
1. Le calcul numérique	7
2. Le calcul algébrique <i>élémentaire</i>	8
3. Le calcul algébrique <i>général</i>	8
II. Le calcul vectoriel	9
1. Dans le plan \mathbb{R}^2	9
2. Dans l'espace \mathbb{R}^3	11
3. Dans l'espace (vectoriel) \mathbb{R}^n	13
4. L'espace vectoriel : une structure algébrique adaptée à la géométrie	14

I. Du calcul numérique au calcul algébrique

1. Le calcul numérique

Le calcul numérique consiste à déterminer la valeur d'une expression formée de nombres, d'opérations ^[1] et de parenthèses ^[2].

- $2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$
- $(-1)^2 - (-1) - 2 = 0$

On peut étendre ce calcul à l'analyse numérique qui étudie les suites et les fonctions numériques ^[3].

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{3}{u_n} \right)$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{x} \right)$

On peut enfin évoquer les méthodes numériques ^[4], au carrefour des Mathématiques et de l'Informatique, qui traitent les algorithmes permettant d'approcher des solutions de problèmes que l'on ne sait pas résoudre « de manière exacte ».

- Solution positive de l'équation $x^2 - 3 = 0$ c'est à dire valeur de $\sqrt{3}$
- Aire du disque de rayon 1 autrement dit valeur de π

Le module *sciPy* (souvent disponible par défaut) permet de faire du calcul numérique avec Python.



```
def approxRacineDe3(eps) :
    a = 5
    b = 0.5 * (a + 3 / a)
    while (a - b) > eps :
        a = b
        b = 0.5 * (b + 3 / b)
    print('Une valeur approchée de racine carrée de 3 à ', eps, 'près est ', b)

approxRacineDe3(0.001)
# Une valeur approchée de racine carrée de 3 à 0.001 près est 1.7320508078819778
```

[1]. addition, soustraction, multiplication et division

[2]. indiquant les priorités de calcul

[3]. réelles voire complexes

[4]. Cf. Ressource R2.09

2. Le calcul algébrique élémentaire

Le calcul algébrique élémentaire permet de généraliser le calcul numérique en incluant dans les expressions des lettres qui peuvent représenter des inconnues, mais aussi des paramètres.

Typiquement, l'algèbre élémentaire s'intéresse à la résolution d'équations polynomiales.

- $2x - 1 = 0$
- $ax + b = 0$
- $x^2 - x - 2 = 0$
- $ax^2 + bx + c = 0$
- $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$
- $ax + by = 0$

Le module `sympy` permet de faire du calcul algébrique avec Python.

Jupyter Notebook

```
File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help
+ < > < > < > < > < > < > Code
In [2]: from sympy import *
        init_session()

IPython console for SymPy 1.0 (Python 3.6.1-64-bit) (ground types: python)

These commands were executed:
>>> from __future__ import division
>>> from sympy import *
>>> x, y, z, t = symbols('x y z t')
>>> k, m, n = symbols('k m n', integer=True)
>>> f, g, h = symbols('f g h', cls=Function)
>>> init_printing()

Documentation can be found at http://docs.sympy.org/1.0/

In [3]: solve(Eq(2*x-1,0),x)
Out[3]: [1/2]

In [4]: a, b = Symbol('a'), Symbol('b')
        solve(Eq(a*x+b,0),x)
Out[4]: [-b/a]

In [5]: solve(Eq(x**2-x-2,0),x)
Out[5]: [-1, 2]

In [6]: a, b, c = Symbol('a'), Symbol('b'), Symbol('c')
        solve(Eq(a*x**2+b*x+c,0),x)
Out[6]: [1/2a*(-b + sqrt(-4ac + b^2)), -1/2a*(b + sqrt(-4ac + b^2))]

In [7]: a, b = Symbol('a'), Symbol('b')
        linsolve([Eq(a*x+b*y,0)],(x,y))
Out[7]: {(-b/a, y)}
```

3. Le calcul algébrique général

L'algèbre générale va encore plus loin dans la généralisation, en s'intéressant aux structures algébriques et à leurs relations.

- **Groupes** : $(\mathbb{Z}, +)$, (\mathbb{R}^*, \times) , (\mathcal{S}_n, \circ)
- **Anneaux** : $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{R}[X], +, \times)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$
- **Corps** : $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$, $(\mathbb{R}(X), +, \times)$, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$
- **Espaces vectoriels** : cf. ci-dessous

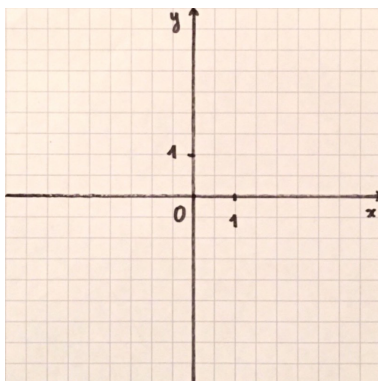
II. Le calcul vectoriel

1. Dans le plan \mathbb{R}^2

Un couple (x, y) peut être vu comme le point M de coordonnées x et y , mais aussi comme le vecteur \overrightarrow{OM} de composantes x et y .



Représenter le point puis le vecteur correspondant au couple $(3, 2)$.



Dans ce cours, nous nous intéressons uniquement aux vecteurs.

Soit (x, y) , (x', y') deux vecteurs de \mathbb{R}^2 et α un réel.

L'addition (interne) et la multiplication (externe) par un réel sont définies terme à terme :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad \alpha \times (x, y) = \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

En considérant un deuxième réel β , on peut calculer l'expression suivante :

$$\alpha(x, y) + \beta(x', y') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$$

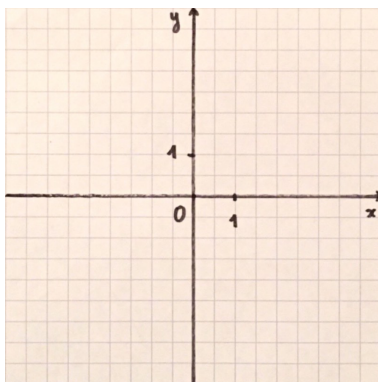
Il s'agit de la combinaison linéaire des vecteurs (x, y) et (x', y') , de coefficients α et β .



Soit $\vec{u} = (2, 1)$ et $\vec{v} = (1, 2)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 .

Représenter les vecteurs suivants :

1. \vec{u} et \vec{v}
2. $\vec{w}_1 = \vec{u} + \vec{v}$ (on pourra « translater » \vec{v} pour représenter graphiquement l'addition)
3. $\vec{w}_2 = 2\vec{u}$
4. $\vec{w}_3 = 2\vec{u} - 3\vec{v}$



L'ensemble des vecteurs colinéaires à (x, y) est défini par :

$$\text{Vect}((x, y)) = \{\alpha(x, y) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

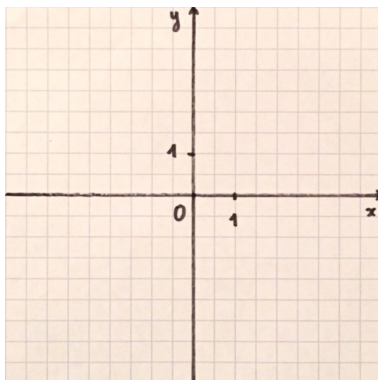
L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs (x, y) et (x', y') est défini par :

$$\text{Vect}((x, y), (x', y')) = \{\alpha(x, y) + \beta(x', y') \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$



En reprenant les notations de l'exercice précédent, représenter les ensembles ^a suivants :

1. $E = \text{Vect}(\vec{u})$
2. $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{w}_2)$
3. $G = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$



a. Ce sont des ensembles de vecteurs mais ils seront représentés comme des ensembles de points!

On dit que :

- la droite E est engendrée par \vec{u}
- le plan G est engendré par \vec{u} et \vec{v}



Deux vecteurs n'engendrent pas toujours un plan.

En effet, les vecteurs \vec{u} et \vec{w}_2 engendrent une droite car ils sont colinéaires.

Chaque vecteur (x, y) de \mathbb{R}^2 s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

On dit que :

- les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^2
- x et y sont les coordonnées de (x, y) dans la base ^[5] $((1, 0), (0, 1))$
- \mathbb{R}^2 est de dimension 2



1. A quelle condition deux vecteurs forment-ils une base de \mathbb{R}^2 ?
2. Déterminer ^a les coordonnées de $(5, 3)$ dans les bases suivantes :
 - (a) $((1, 0), (0, 1))$
 - (b) $((1, 0), (1, 1))$
 - (c) $((1, 1), (1, 2))$

a. en résolvant un système de deux équations à deux inconnues α et β



- Le premier système (diagonal) est immédiat
- Le deuxième système (triangulaire) est facile à résoudre par substitution en partant de l'équation (2)
- Le troisième est plus délicat, mais on peut se ramener à un système triangulaire équivalent en remplaçant l'équation (2) par l'équation combinée (1)-(2). La méthode du Pivot de Gauss, présentée plus loin, généralise cette démarche
- **Les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base utilisée!**

[5]. appelée la base canonique de \mathbb{R}^2

2. Dans l'espace \mathbb{R}^3



Ici encore, un triplet (x, y, z) peut être vu comme un point ou un vecteur.
Dans ce cours, nous nous intéressons uniquement aux vecteurs.

Soit $(x, y, z), (x', y', z')$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 et α un réel.

L'addition (interne) et la multiplication (externe) par un réel sont définies terme à terme :

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \quad \text{et} \quad \alpha \times (x, y, z) = \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

L'ensemble des vecteurs colinéaires à (x, y, z) est défini par :

$$\text{Vect}((x, y, z)) = \{\alpha(x, y, z) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs (x, y, z) et (x', y', z') est défini par :

$$\text{Vect}((x, y, z), (x', y', z')) = \{\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $(x, y, z), (x', y', z')$ et (x'', y'', z'') est défini par :

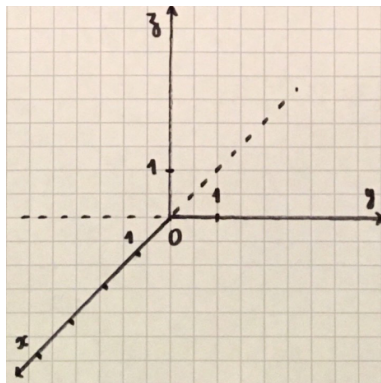
$$\text{Vect}((x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'')) = \{\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') + \gamma(x'', y'', z'') \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$



Soit $\vec{u} = (1, 0, 0), \vec{v} = (0, 1, 0)$ et $\vec{w} = (0, 0, 1)$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Représenter les ensembles ^a suivants :

1. $E = \text{Vect}(\vec{u})$
2. $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$
3. $G = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, 2\vec{u})$
4. $H = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v})$
5. $I = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$



^a. Ce sont des ensembles de vecteurs mais ils seront représentés comme des ensembles de points!

On dit que :

- la droite E est engendrée par \vec{u}
- le plan F est engendré par \vec{u} et \vec{v}
- l'espace I est engendré par \vec{u}, \vec{v} et \vec{w}



Trois vecteurs n'engendrent pas toujours un espace.

En effet, les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et $\vec{u} + \vec{v}$ engendrent un plan car ils sont coplanaires.

Chaque vecteur (x, y, z) de \mathbb{R}^3 s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

On dit que :

- les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^3
- x , y et z sont les coordonnées de (x, y, z) dans la base ^[6] $\left((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \right)$
- \mathbb{R}^3 est de dimension 3



1. A quelle condition trois vecteurs forment-ils une base de \mathbb{R}^3 ?
2. Déterminer ^a les coordonnées de $(2, 8, 3)$ dans les bases suivantes :
 - (a) $\left((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \right)$
 - (b) $\left((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1) \right)$
 - (c) $\left((1, 2, -1), (-1, 2, -1), (1, 6, -2) \right)$

a. en résolvant un système de trois équations à trois inconnues α , β et γ



- Le premier système (diagonal) est immédiat
- Le deuxième système (triangulaire) est facile à résoudre par substitution en partant de l'équation (3)
- Le troisième est plus délicat, mais on peut se ramener à un système triangulaire équivalent selon la méthode du Pivot de Gauss présentée ci-dessous.



Méthode du Pivot de Gauss

On choisit un pivot sur la première ligne (terme non nul) :

$$\begin{cases} \alpha & -\beta & +\gamma & = & 2 & L_1 \\ 2\alpha & +2\beta & +6\gamma & = & 8 & L_2 \\ -\alpha & -\beta & -2\gamma & = & 3 & L_3 \end{cases}$$

On supprime les termes en dessous du pivot à l'aide de L_1 **uniquement** :

$$\begin{cases} \alpha & -\beta & +\gamma & = & 2 \\ & 4\beta & +4\gamma & = & 4 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & -2\beta & -\gamma & = & 5 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

On choisit ensuite un pivot sur la deuxième ligne :

$$\begin{cases} \alpha & -\beta & +\gamma & = & 2 & L_1 \\ & 4\beta & +4\gamma & = & 4 & L_2 \\ & -2\beta & -\gamma & = & 5 & L_3 \end{cases}$$

On supprime les termes en dessous du pivot à l'aide de L_2 **uniquement** :

$$\begin{cases} \alpha & -\beta & +\gamma & = & 2 \\ & 4\beta & +4\gamma & = & 4 \\ & & 2\gamma & = & 14 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{cases}$$

Le dernier système est bien triangulaire, il ne reste plus qu'à le résoudre par substitution "en remontant" :

- $\gamma = 7$
- $\beta = -6$
- $\alpha = -11$

Finalement, les coordonnées recherchées sont -11 , -6 et 7 autrement dit $(2, 8, 3) = -11(1, 2, -1) - 6(-1, 2, -1) + 7(1, 6, -2)$

[6]. appelée la base canonique de \mathbb{R}^3

3. Dans l'espace (vectoriel) \mathbb{R}^n

Définition (addition (interne) et multiplication (externe)).

Soit $(x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n et α un réel.

L'addition (interne) et la multiplication (externe) par un réel sont définies terme à terme :

$$(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n) \quad \text{et} \quad \alpha \times (x_1, \dots, x_n) = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

Définition (combinaison linéaire de vecteurs).

Soit u_1, \dots, u_n des vecteurs de \mathbb{R}^n .

Une combinaison linéaire de u_1, \dots, u_n est un vecteur de la forme :

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

où les α_i sont les coefficients (réels) de la combinaison linéaire.

Définition (sev engendré par des vecteurs).

Soit u_1, \dots, u_n des vecteurs de \mathbb{R}^n .

L'ensemble des combinaisons linéaires de u_1, \dots, u_n est défini par :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \{ \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}$$

On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par u_1, \dots, u_n .

Sous espace vectoriel

Cette partie $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ de \mathbb{R}^n vérifie les conditions suivantes :

- $F \neq \emptyset$
- F est stable par addition (interne) : $\forall u, v \in F, u + v \in F$
- F est stable par multiplication (externe) : $\forall u \in F, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha u \in F$

Une telle partie est un sous-espace vectoriel (sev) de \mathbb{R}^n .

En fait, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est le plus petit sev de \mathbb{R}^n contenant u_1, \dots, u_n .

Définition (droite vectorielle, plan vectoriel).

Soit u, v des vecteurs de \mathbb{R}^n avec $u \neq (0, \dots, 0)$.

- $\text{Vect}(u)$ est la droite vectorielle engendrée par u . C'est l'ensemble des vecteurs dits colinéaires à u .
- Si v n'est pas colinéaire à u c'est à dire $v \notin \text{Vect}(u)$, alors $\text{Vect}(u, v)$ est le plan vectoriel engendré par u et v .

Définition (base canonique de \mathbb{R}^n).

Notons $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Chaque vecteur (x_1, \dots, x_n) de \mathbb{R}^n s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de e_1, e_2, \dots, e_n :

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

On dit que :

- les vecteurs e_1, e_2, \dots, e_n forment une base de \mathbb{R}^n
- x_1, \dots, x_n sont les coordonnées de (x_1, \dots, x_n) dans la base canonique ^a (e_1, \dots, e_n)
- \mathbb{R}^n est de dimension n

a. La base est dite *canonique* car elle est « naturelle » : les coordonnées **dans cette base** sont rien d'autres que les composantes!

Vecteurs linéairement indépendants

n vecteurs u_1, \dots, u_n forment une base de \mathbb{R}^n si et seulement s'ils sont linéairement indépendants :

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0_E) \Rightarrow (\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0)$$

On notera que :

- deux vecteurs u_1, u_2 sont linéairement indépendants si et seulement s'ils sont non colinéaires
- trois vecteurs u_1, u_2, u_3 sont linéairement indépendants si et seulement s'ils sont non coplanaires^a

On verra plus loin que :

- n vecteurs u_1, \dots, u_n sont linéairement indépendants si et seulement si $\det(u_1, \dots, u_n) \neq 0$

Cette dernière caractérisation est à privilégier en dimension finie, mais elle n'est plus disponible en dimension infinie...

On remarquera enfin qu'une base de \mathbb{R}^n compte toujours n vecteurs (linéairement indépendants), ce nombre commun à toutes les bases correspond précisément à la définition de la dimension.

^a. **Attention**, trois vecteurs peuvent être non colinéaires deux à deux, mais coplanaires!

Dans l'espace-temps \mathbb{R}^4

Déterminer^a les coordonnées de $(2, 4, 1, 3)$ dans les bases suivantes :

1. $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$
2. $((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1))$
3. $((1, 0, 1, 2), (0, 1, 0, 3), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1))$

^a. en résolvant, par la méthode du pivot de Gauss, un système de quatre équations à quatre inconnues α, β, γ et δ



On verra plus loin comment obtenir matriciellement les coordonnées dans une base à partir de celles dans la base canonique.

En fait, \mathbb{R}^n muni de l'addition (interne) et de la multiplication (externe) est un espace vectoriel (ev)...

4. L'espace vectoriel : une structure algébrique adaptée à la géométrie

Définition (\mathbb{R} -ev ou plus simplement ev).

Un ev est un ensemble E muni de deux opérations :

- une addition (interne) notée $+$: $E \times E \rightarrow E$
- une multiplication (externe) notée \cdot : $E \times \mathbb{R} \rightarrow E$

L'addition (interne) doit être une opération :

- associative : $\forall u, v, w \in E, u + (v + w) = (u + v) + w$
- commutative : $\forall u, v \in E, u + v = v + u$
- avec un élément neutre noté 0_E ou 0 : $\forall u \in E, u + 0 = u$
- pour laquelle tout vecteur admet un symétrique : $\forall u \in E, u + (-u) = 0$

Et la multiplication (externe) doit vérifier :

- $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$
- $\forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
- $\forall u \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \beta) \cdot u$
- $\forall u \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$



- Un ev E n'admet qu'un seul élément neutre, appelé aussi vecteur nul, ce qui légitime la notation 0_E
- Dans un ev, un vecteur u n'admet qu'un seul symétrique, appelé aussi opposé, ce qui légitime la notation $-u$
- Pour accéder à la notion d'orthogonalité, on doit disposer d'un produit scalaire...

Propriété (ev des suites réelles).

L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni des opérations définies par :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- $\alpha (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

forme un ev (de dimension infinie) dont le vecteur nul est la suite nulle.

Propriété (ev des applications réelles d'une variable réelle).

L'ensemble des applications réelles d'une variable réelle $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ muni des opérations définies par :

- $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$
- $\alpha f : x \mapsto \alpha f(x)$

forme un ev (de dimension infinie) dont le vecteur nul est l'application nulle.



Comprenez-vous les notations $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ au regard de \mathbb{R}^n ?

Propriété (ev des polynômes de degré inférieur ou égal à n).

L'ensemble des polynômes (à coefficients réels) de degré inférieur ou égal à n ,

$$\mathbb{R}_n[X] = \left\{ P : x \mapsto a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et donc un ev (de dimension $n + 1$) muni des mêmes opérations que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Chapitre B

Le calcul matriciel en algèbre linéaire

Sommaire

I. Le calcul matriciel	17
1. Les matrices	17
2. L'addition (interne) et la multiplication (externe) par un réel	19
3. La multiplication matricielle	19
4. L'inversion de matrice	21
II. L'interprétation en algèbre linéaire	25
1. Les matrices en algèbre linéaire	25
2. Interprétation de la multiplication matricielle	28
3. Les formules de changements de bases (hors programme)	28

I. Le calcul matriciel

1. Les matrices

Définition (matrice).

Une matrice est un tableau dont les éléments sont repérés par un indice ligne suivi d'un indice colonne :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$$

L'ensemble des matrices à p lignes et n colonnes (à coefficients réels) est noté $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Définition (matrice ligne).

Une matrice ligne est de la forme :

$$(a_{11} \quad \dots \quad a_{1n})$$



| Les coefficients ne sont pas séparés par une virgule comme dans un n -uplet.

Définition (matrice colonne).

Une matrice colonne est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}$$



Un vecteur de \mathbb{R}^n , c'est à dire un n -uplet, s'écrit toujours en ligne avec les composantes séparées par une virgule.

Définition (matrice carrée).

Une matrice est carrée si elle possède autant de lignes que de colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n (à coefficients réels) est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition (matrice (carrée) triangulaire supérieure).

Une matrice (carrée) est triangulaire supérieure si tous les coefficients en dessous de la diagonale ^a sont nuls :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

^a. La diagonale va du coin supérieur gauche au coin inférieur droit



- Les coefficients diagonaux a_{ii} peuvent éventuellement être nuls
- On définit, suivant le même principe, une matrice (carrée) triangulaire inférieure

Définition (matrice (carrée) diagonale).

Une matrice (carrée) est diagonale si elle est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition (matrice (carrée) identité).

La matrice identité d'ordre n , notée I_n , est la matrice diagonale avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. L'addition (interne) et la multiplication (externe) par un réel

L'addition de deux matrices se fait terme à terme :

Définition (addition).

L'addition de deux matrices de même taille $a \times n$ est définie par :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} + b_{p1} & \dots & a_{pn} + b_{pn} \end{pmatrix}$$

a. Elles doivent avoir le même nombre de lignes p et le même nombre de colonnes n

La multiplication d'une matrice par un réel se fait également terme à terme :

Définition (multiplication par un réel).

La multiplication par $\lambda \in \mathbb{R}$ d'une matrice de taille $p \times n$ est définie par :

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{p1} & \dots & \lambda a_{pn} \end{pmatrix}$$

EXPERT Ev des matrices

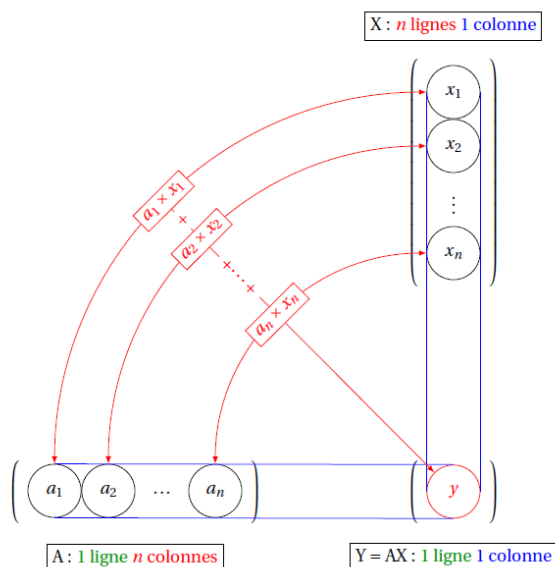
| L'ensemble $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ muni de ces deux opérations est un ev de dimension finie égale à pn .

3. La multiplication matricielle



La multiplication matricielle ne se fait pas terme à terme. Ce produit existe, il est appelé produit d'Hadamard et est utilisé, par exemple, pour les filtres en traitement d'images ou pour caractériser l'anti-symétrie d'une relation dans un ensemble à partir de la matrice d'adjacence

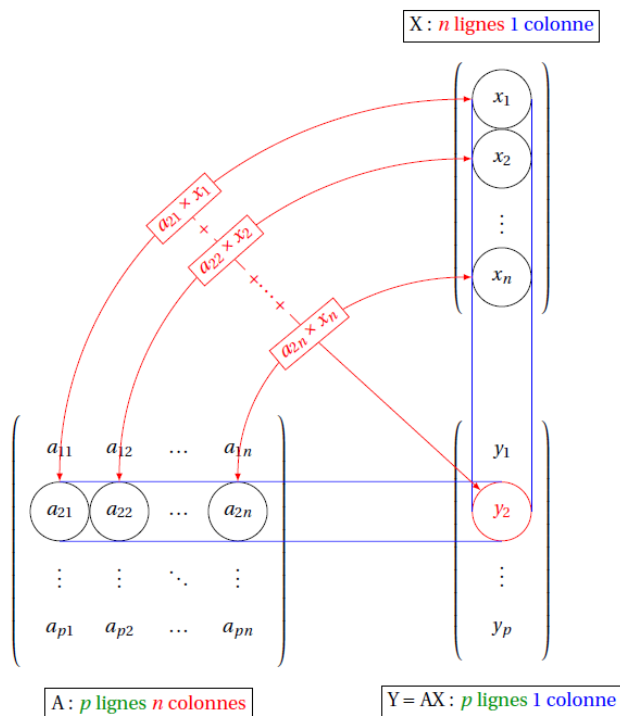
Regardons d'abord la multiplication entre une matrice ligne et une matrice colonne :





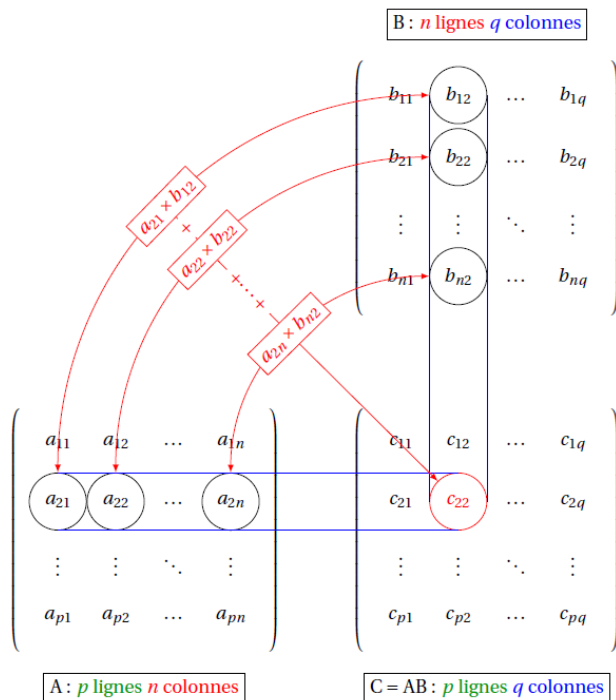
Calculer le produit $Y = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Regardons ensuite la multiplication entre une matrice (quelconque) et une matrice colonne :



Calculer le produit $Y = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Regardons enfin la multiplication entre deux matrices « quelconques » :





1. Le produit matriciel est-il toujours bien défini?

2. Calculer les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Que peut-on en déduire?

4. L'inversion de matrice

Matrice inversible

Définition (matrice inversible et matrice inverse).

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n$$

Dans ce cas, B est unique, appelée matrice inverse de A et notée A^{-1} .



- Dans \mathbb{R} , 2 est inversible d'inverse $\frac{1}{2}$ car $2 \times \frac{1}{2} = 1$ et (par commutativité) $\frac{1}{2} \times 2 = 1$. On note aussi $2^{-1} = \frac{1}{2}$
- Une matrice qui n'est pas carrée ne peut pas être inversible



On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 .
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .



Contrairement à un réel non nul qui est toujours inversible, une matrice carrée non nulle ne l'est pas toujours. Mais alors, comment peut-on décider si une matrice est inversible ou pas?

Définition (déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2).

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Le déterminant de A , noté $\det(A)$ ou $|A|$, est le réel défini par :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Définition (déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3).

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Le déterminant de A est le réel défini par :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$



On a "développé suivant la première ligne" :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

En réalité, on peut développer suivant n'importe quelle ligne ou colonne.



Les signes des coefficients devant les déterminants d'ordre 2 changent :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$



- Développement suivant la 2-ième ligne :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

- Développement suivant la 3-ième colonne :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$



- On choisit la ligne ou la colonne contenant le maximum de 0
- On ne change pas le déterminant en remplaçant une ligne (resp. colonne) par la somme de cette ligne (resp. colonne) et d'une combinaison linéaire des autres. On peut ainsi faire apparaître des zéros, et faciliter le "développement"
- On peut, en généralisant, calculer des déterminants d'ordre supérieur



Lorsqu'on multiplie une ligne (resp. colonne) par un réel, le déterminant l'est également

Propriété (CNS d'inversibilité).

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.



Etudier l'inversibilité des matrices suivantes :

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce critère est effectivement bien pratique, mais alors comment peut-on déterminer (lorsqu'elle existe) la matrice inverse?

Détermination pratique de l'inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

Déterminer l'inverse de A revient à résoudre l'équation (matricielle) :

$$AX = B$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et de second membre $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En effet, en multipliant (à gauche) les deux membres par A^{-1} , il vient :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

ce qui fournit :

$$I_n X = A^{-1}B$$

ou encore :

$$X = A^{-1}B$$



Déterminons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en résolvant l'équation :

$$AX = B$$

d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et de second membre $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

c'est à dire l'équation :

$$\begin{pmatrix} x+z \\ 2x+2y+3z \\ -x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ou encore le système linéaire :

$$\begin{cases} x & & +z & = & a \\ 2x & +2y & +3z & = & b \\ -x & +2y & & +z & = & c \end{cases}$$

Pour cela, appliquons la méthode du pivot de Gauss :

On cherche d'abord un système équivalent "échelonné" :

$$\begin{cases} x & +z = a \\ 2x & +2y +3z = b \\ -x & +2y +z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +z = a \\ 2y & +z = -2a + b & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2y & +2z = a + c & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +z = a \\ 2y & +z = -2a + b \\ z & = 3a - b + c & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Ensuite, on résout le système "échelonné" en "remontant" :

$$\begin{cases} x & +z = a \\ 2y & +z = -2a + b \\ z & = 3a - b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +z = a \\ y & = -\frac{5}{2}a + b - \frac{1}{2}c \\ z & = 3a - b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = -2a + b - c \\ y & = -\frac{5}{2}a + b - \frac{1}{2}c \\ z & = 3a - b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



- Les termes du second membre doivent être bien rangés
- N'oubliez pas de vérifier votre résultat



On peut présenter la démarche précédente de manière plus "simple" :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$$

II. L'interprétation en algèbre linéaire



L'intérêt des matrices ne se limite pas à l'algèbre linéaire, vous verrez bientôt leur utilité en théorie des graphes...

1. Les matrices en algèbre linéaire

Les matrices colonnes

Définition (matrice d'un vecteur de \mathbb{R}^n).

Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de \mathbb{R}^n et $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ un vecteur de \mathbb{R}^n .

On appelle matrice du vecteur u dans la base \mathcal{B} la matrice colonne formée des coordonnées de u dans \mathcal{B} :

$$\mathcal{M}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$



- On notera simplement $\mathcal{M}(u)$ s'il s'agit de la base canonique
- Cette matrice dépend évidemment de la base choisie



On note $\mathcal{B} = ((2, -1), (1, 1))$ et l'on considère $\mathcal{M}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer le vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ puis sa matrice $\mathcal{M}(u)$ dans la base canonique.

Définition (vecteur canoniquement associé à une matrice colonne).

Le vecteur canoniquement associé à la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est le vecteur u de \mathbb{R}^n vérifiant $\mathcal{M}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Il s'agit du vecteur u de \mathbb{R}^n dont les coordonnées dans la base canonique sont x_1, \dots, x_n c'est à dire $u = (x_1, \dots, x_n)$.

Les autres matrices

Vous connaissez bien les applications linéaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de la forme $x \mapsto ax$ avec $a, x \in \mathbb{R}$.

Mais alors à quoi ressemblent les applications de la forme $X \mapsto AX$ avec $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$?

Par définition du produit matriciel, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n \end{pmatrix}$.

Définition (application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p).

Une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p est une application de la forme :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n)$$

Définition (application linéaire ou morphisme d'ev).

Soit E, F deux ev et $f : E \rightarrow F$ une application.

On dit que l'application f est linéaire si :

- f respecte l'addition : $\forall u, v \in E, f(u + v) = f(u) + f(v)$
- f respecte la multiplication : $\forall u \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha u) = \alpha f(u)$


Définition (matrice d'une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p).

Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de \mathbb{R}^n , $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_p)$ une base de \mathbb{R}^p et f l'application linéaire définie^a par :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(u_i) = a_{1i}v_1 + \dots + a_{pi}v_p$$

On appelle matrice de f dans $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ la matrice formée, en colonnes, des coordonnées de $f(u_1), \dots, f(u_n)$ dans \mathcal{B}' :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

a.  Pourquoi suffit-il de connaître les $f(u_i)$?



- On notera simplement $\mathcal{M}(f)$ s'il s'agit des bases canoniques
- On notera plutôt $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ si $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$
- Cette matrice dépend évidemment des bases choisies



1. Soit f l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\longmapsto (x - y + z, 2x + 2y + 6z + 4t, -x - 2z - t) \end{aligned}$$

Déterminer $\mathcal{M}(f)$.

2. Soit φ la forme linéaire de \mathbb{R}^3 définie par :

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x + 2y - z \end{aligned}$$

Déterminer $\mathcal{M}(\varphi)$.

3. Soit p la projection orthogonale sur $\text{Vect}((1,0))$ définie par :

$$p: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x,0) \end{array}$$

Déterminer $\mathcal{M}(p)$.

4. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}((1,0))$ définie par :

$$s: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x,-y) \end{array}$$

Déterminer $\mathcal{M}(s)$.

5. Soit h l'homothétie définie par :

$$h: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto \lambda(x,y) \end{array} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Déterminer $\mathcal{M}(h)$.

Définition (application linéaire canoniquement associée à une matrice).

L'application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est l'app. linéaire f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p vérifiant $\mathcal{M}(f) = A$.



1. Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. De quelle transformation géométrique s'agit-il?

2. Interprétation de la multiplication matricielle

A propos de l'addition (interne) et de la multiplication (externe)

- L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ des applications linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p est un ev
- L'application $\phi: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est linéaire et bijective
 $f \longmapsto \mathcal{M}(f)$
- Cet « isomorphisme » permet de transformer un problème d'algèbre linéaire (de dimension finie) en un problème matriciel dont la résolution est plus pratique^a

a. On peut par exemple utiliser la structure de tableaux dans les implémentations

Si A est la matrice de l'application linéaire f et X celle du vecteur x , alors AX sera celle du vecteur $f(x)$:

$$\mathcal{M}(f)\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}(f(x))$$

Si A est la matrice de l'application linéaire f et B celle de l'application linéaire g , alors AB sera celle de l'application linéaire $f \circ g$:

$$\mathcal{M}(f)\mathcal{M}(g) = \mathcal{M}(f \circ g)$$

Mais alors, qu'en est-il de l'inversion de matrice ?

Si A est la matrice de l'application linéaire f , alors A est inversible si et seulement si f est bijective. Dans ce cas, on a :

$$\mathcal{M}(f)\mathcal{M}(f^{-1}) = I_n \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(f^{-1})\mathcal{M}(f) = I_n$$

Autrement dit, $\mathcal{M}(f)$ est inversible d'inverse $\mathcal{M}(f^{-1})$:

$$(\mathcal{M}(f))^{-1} = \mathcal{M}(f^{-1})$$

3. Les formules de changements de bases (hors programme)

Soit u un vecteur de \mathbb{R}^n et f une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .

On considère deux bases de \mathbb{R}^n :

- "l'ancienne" ^[1] $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$
- "la nouvelle" $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$

Se posent alors les questions suivantes :

- Comment obtenir $\mathcal{M}(u, \mathcal{B}')$ à partir de $\mathcal{M}(u, \mathcal{B})$?
- Comment obtenir $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}')$ à partir de $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$?

En général, nous disposons des coordonnées de e'_1, \dots, e'_n dans la base \mathcal{B} :

Définition (matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}').

La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est la donnée en colonnes des coordonnées de e'_1, \dots, e'_n dans la base \mathcal{B} ou encore :

$$P = \mathcal{M}(id, \mathcal{B}', \mathcal{B})$$



! La base au départ est la nouvelle

[1]. Il s'agit souvent de la base canonique

Propriété (matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B}).

$P = \mathcal{M}(id, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ est inversible et $P^{-1} = \mathcal{M}(id, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$

Propriété (formule de changement de base pour un vecteur).

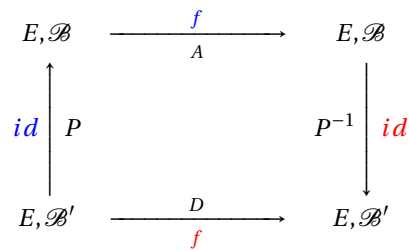
En notant $X = \mathcal{M}(u, \mathcal{B})$ et $X' = \mathcal{M}(u, \mathcal{B}') = \mathcal{M}(id(u), \mathcal{B}')$, on a :

$$X' = P^{-1}X$$



! C'est P^{-1} qui permet d'obtenir les nouvelles coordonnées

Enfin, considérons le diagramme de décomposition suivant :



où $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ et $D = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}')$.

Il exprime :

$$f = id \circ f \circ id$$

ce qui se traduit matriciellement par :

Propriété (formule de changement de base pour une application linéaire).

En notant $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ et $D = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}')$, on a :

$$D = P^{-1}AP$$



Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère la famille formée des vecteurs :

$$e'_1 = (1, 2, -1), e'_2 = (0, 2, 2) \text{ et } e'_3 = (1, 3, 1)$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la matrice de f dans cette nouvelle base.



- L'intérêt est de "simplifier" la matrice de f
- La théorie de la diagonalisation explique comment choisir une telle base

- Pour montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de \mathbb{R}^3 , il suffit ^a de montrer que $\det(e'_1, e'_2, e'_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

a. La contraposée vous indique pourquoi