R1.07 - Outils fondamentaux
Cours 1 - Du calcul numérique au calcul vectoriel

A. Ridard

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - l'icône en dessous du logo IUT
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

Plan du cours

Le calcul numérique consiste à déterminer la valeur d'une expression formée de nombres, d'opérations[1] et de parenthèses[2].

- $2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$
- $(-1)^2 - (-1) - 2 = 0$

1. addition, soustraction, multiplication et division
2. indiquant les priorités de calcul

On peut étendre ce calcul à l'analyse numérique qui étudie les suites et les fonctions numériques [3].

- $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right)$
- $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$

3. réelles voire complexes

On peut enfin évoquer les méthodes numériques[4], au carrefour des Mathématiques et de l'Informatique, qui traitent les algorithmes permettant d'approcher des solutions de problèmes que l'on ne sait pas résoudre « de manière exacte ».

- Solution positive de l'équation $x^2 - 3 = 0$ c'est à dire valeur de $\sqrt{3}$
- Aire du disque de rayon 1 autrement dit valeur de π

4. Cf. Ressource R2.09

Le module sciPy (souvent disponible par défaut) permet de faire du calcul numérique avec Python.

Spyder

```
def approxRacineDe3(eps) :
    a = 5
    b = 0.5 * (a + 3 / a)
    while (a - b) > eps :
        a = b
        b = 0.5 * (b + 3 / b)
    print('Une valeur approchée de racine carrée de 3 à', eps, 'près est', b)

approxRacineDe3(0.001)
# Une valeur approchée de racine carrée de 3 à 0.001 près est 1.7320508078819778
```

Le calcul algébrique élémentaire permet de généraliser le calcul numérique en incluant dans les expressions des lettres qui peuvent représenter des inconnues, mais aussi des paramètres.
Typiquement, l'algèbre élémentaire s'intéresse à la résolution d'équations polynomiales.

- $2x - 1 = 0$
- $ax + b = 0$
- $x^2 - x - 2 = 0$
- $ax^2 + bx + c = 0$
- $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$
- $ax + by = 0$

Le module symPy permet de faire du calcul algébrique avec Python.

Jupyter Notebook

File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help

Code

```
In [2]: from sympy import *
        init_session()

IPython console for SymPy 1.0 (Python 3.6.1-64-bit) (ground types: python)

These commands were executed:
>>> from __future__ import division
>>> from sympy import *
>>> x, y, z, t = symbols('x y z t')
>>> k, m, n = symbols('k m n', integer=True)
>>> f, g, h = symbols('f g h', cls=Function)
>>> init_printing()

Documentation can be found at http://docs.sympy.org/1.0/

In [3]: solve(Eq(2*x-1,0),x)
```

Out[3]: $\left[\frac{1}{2}\right]$

```
In [4]: a, b = Symbol('a'), Symbol('b')
        solve(Eq(a*x+b,0),x)
```

Out[4]: $\left[-\frac{b}{a}\right]$

Jupyter Notebook

In [5]:
```
solve(Eq(x**2-x-2,0),x)
```
Out[5]: $[-1, \quad 2]$

In [6]:
```
a, b, c = Symbol('a'), Symbol('b'), Symbol('c')
solve(Eq(a*x**2+b*x+c,0),x)
```
Out[6]: $\left[\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{-4ac+b^2}\right), \quad -\frac{1}{2a}\left(b+\sqrt{-4ac+b^2}\right)\right]$

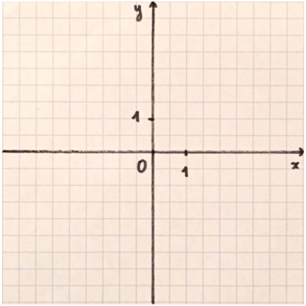
In [7]:
```
a, b = Symbol('a'), Symbol('b')
linsolve([Eq(a*x+b*y,0)],(x,y))
```
Out[7]: $\left\{\left(-\frac{by}{a}, \quad y\right)\right\}$

L'algèbre générale va encore plus loin dans la généralisation, en s'intéressant aux structures algébriques et à leurs relations.

- **Groupes** : $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathscr{S}_n,\circ)$
- **Anneaux** : $(\mathbb{Z},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{R}[X],+,\times)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$
- **Corps** : $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{C},+,\times)$, $(\mathbb{R}(X),+,\times)$, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$
- **Espaces vectoriels** : cf. ci-dessous

Un couple (x,y) peut être vu comme le point M de coordonnées x et y, mais aussi comme le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de composantes x et y.

Représenter le point puis le vecteur correspondant au couple $(3,2)$.



Dans ce cours, nous nous intéressons uniquement aux vecteurs.

Soit (x,y), (x',y') deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et α un réel.

L'addition (int.) et la multiplication (ext.) par un réel sont définies terme à terme :

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \quad \text{et} \quad \alpha \times (x,y)=\alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$$

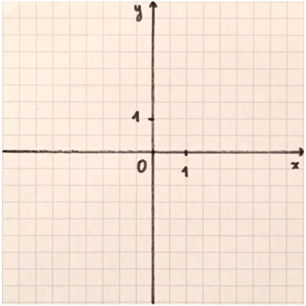
En considérant un deuxième réel β, on peut calculer l'expression suivante :

$$\alpha(x,y)+\beta(x',y')=(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y')$$

Il s'agit de la combinaison linéaire des vecteurs (x,y) et (x',y'), de coefficients α et β.

Soit $\overrightarrow{u} = (2,1)$ et $\overrightarrow{v} = (1,2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Représenter les vecteurs suivants :

1. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
2. $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ (on pourra « translater » $\overrightarrow{v}$ pour représenter graph. l'addition)
3. $\overrightarrow{w_2} = 2\overrightarrow{u}$
4. $\overrightarrow{w_3} = 2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$



L'ensemble des vecteurs colinéaires à (x, y) est défini par :

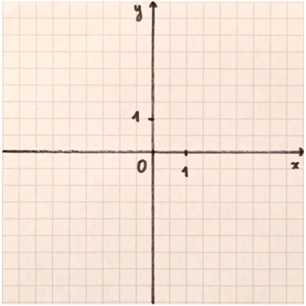
$$Vect\Big((x,y)\Big) = \Big\{\alpha(x,y) \mid \alpha \in \mathbb{R}\Big\}$$

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs (x, y) et (x', y') est défini par :

$$Vect\Big((x,y),(x',y')\Big) = \Big\{\alpha(x,y) + \beta(x',y') \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\Big\}$$

En reprenant les notations de l'ex. préc., représenter les ensembles [a] suivants :

1. $E = Vect\left(\overrightarrow{u}\right)$
2. $F = Vect\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w_2}\right)$
3. $G = Vect\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$



a. Ce sont des ensembles de vecteurs mais ils seront représentés comme des ensembles de points !

On dit que :

- la droite E est engendrée par $\overrightarrow{u}$
- le plan G est engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

Deux vecteurs n'engendrent pas toujours un plan.
En effet, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w_2}$ engendrent une droite car ils sont colinéaires.

Chaque vecteur (x,y) de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$:

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

On dit que :

- les vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$
- x et y sont les coordonnées de (x,y) dans la base[5] $\big((1,0),(0,1)\big)$
- $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2

5. appelée la base canonique de $\mathbb{R}^2$

1. A quelle condition deux vecteurs forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?
2. Déterminer [a] les coordonnées de (5,3) dans les bases suivantes :
   1. $\big((1,0),(0,1)\big)$
   2. $\big((1,0),(1,1)\big)$
   3. $\big((1,1),(1,2)\big)$

a. en résolvant un système de deux équations à deux inconnues α et β

- Le premier système (diagonal) est immédiat
- Le deuxième système (triangulaire) est facile à résoudre par substitution en partant de l'équation (2)
- Le troisième est plus délicat, mais on peut se ramener à un système triangulaire équivalent en remplaçant l'équation (2) par l'équation combinée (1)-(2). La méthode du Pivot de Gauss, présentée plus loin, généralise cette démarche
- **Les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base utilisée !**

Ici encore, un triplet (x, y, z) peut être vu comme un point ou un vecteur.
Dans ce cours, nous nous intéressons uniquement aux vecteurs.

Soit (x,y,z), (x',y',z') deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et α un réel.

L'addition (int.) et la multiplication (ext.) par un réel sont définies terme à terme :

$$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z') \quad \text{et} \quad \alpha\times(x,y,z)=\alpha(x,y,z)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$$

L'ensemble des vecteurs colinéaires à (x,y,z) est défini par :

$$Vect\Big((x,y,z)\Big)=\Big\{\alpha(x,y,z) \mid \alpha\in\mathbb{R}\Big\}$$

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs (x,y,z) et (x',y',z') est défini par :

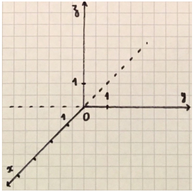
$$Vect\Big((x,y,z),(x',y',z')\Big)=\Big\{\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z') \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\Big\}$$

L'ensemble des comb. lin. des vecteurs (x,y,z), (x',y',z') et $(x",y",z")$ est défini par :

$$Vect\Big((x,y,z),(x',y',z'),(x",y",z")\Big)=\Big\{\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')+\gamma(x",y",z") \mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\Big\}$$

Soit $\vec{u} = (1,0,0)$, $\vec{v} = (0,1,0)$ et $\vec{w} = (0,0,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Représenter les ensembles [a] suivants :

1. $E = Vect\left(\vec{u}\right)$
2. $F = Vect\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$
3. $G = Vect\left(\vec{u}, \vec{v}, 2\vec{u}\right)$
4. $H = Vect\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}\right)$
5. $I = Vect\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$



a. Ce sont des ensembles de vecteurs mais ils seront représentés comme des ensembles de points !

On dit que :

- la droite E est engendrée par $\vec{u}$
- le plan F est engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- l'espace I est engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

⚠

Trois vecteurs n'engendrent pas toujours un espace.
En effet, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{v}$ engendrent un plan car ils sont coplanaires.

Chaque vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$:

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

On dit que :

- les vecteurs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$
- x, y et z sont les coordonnées de (x,y,z) dans la base[6] $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$
- $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3

6. appelée la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. A quelle condition trois vecteurs forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Déterminer [a] les coordonnées de $(2,8,3)$ dans les bases suivantes :
   1. $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$
   2. $\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$
   3. $\big((1,2,-1),(-1,2,-1),(1,6,-2)\big)$

a. en résolvant un système de trois équations à trois inconnues α, β et γ

- Le premier système (diagonal) est immédiat
- Le deuxième système (triangulaire) est facile à résoudre par substitution en partant de l'équation (3)
- Le troisième est plus délicat, mais on peut se ramener à un système triangulaire équivalent selon la méthode du Pivot de Gauss présentée ci-dessous.

Méthode du Pivot de Gauss

On choisit un pivot sur la première ligne (terme non nul) :

$$\left\{\begin{array}{rrrcrr} \boxed{\alpha} & -\beta & +\gamma & = & 2 & L_1 \\ 2\alpha & +2\beta & +6\gamma & = & 8 & L_2 \\ -\alpha & -\beta & -2\gamma & = & 3 & L_3 \end{array}\right.$$

On supprime les termes en dessous du pivot **à l'aide de L_1 uniquement** :

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} \boxed{\alpha} & -\beta & +\gamma & = & 2 & \\ & 4\beta & +4\gamma & = & 4 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & -2\beta & -\gamma & = & 5 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

Méthode du Pivot de Gauss

On choisit ensuite un pivot sur la deuxième ligne :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & -\beta & +\gamma & = & 2 & & L_1 \\ & \boxed{4\beta} & +4\gamma & = & 4 & & L_2 \\ & -2\beta & -\gamma & = & 5 & & L_3 \end{array}\right.$$

On supprime les termes en dessous du pivot **à l'aide de L_2 uniquement** :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \alpha & -\beta & +\gamma & = & 2 & \\ & \boxed{4\beta} & +4\gamma & = & 4 & \\ & & 2\gamma & = & 14 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

Méthode du Pivot de Gauss

Le dernier système est bien triangulaire, il ne reste plus qu'à le résoudre par substitution "en remontant" :

- $\gamma = 7$
- $\beta = -6$
- $\alpha = -11$

Finalement, les coordonnées recherchées sont -11, -6 et 7 autrement dit
$(2,8,3) = -11(1,2,-1) - 6(-1,2,-1) + 7(1,6,-2)$

Définition (addition (interne) et multiplication (externe))

Soit $(x_1,\ldots,x_n)$, $(x'_1,\ldots,x'_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et α un réel.
L'addition (int.) et la multiplication (ext.) par un réel sont définies terme à terme :

$$(x_1,\ldots,x_n)+(x'_1,\ldots,x'_n)=(x_1+x'_1,\ldots,x_n+x'_n)$$

$$\alpha\times(x_1,\ldots,x_n)=\alpha(x_1,\ldots,x_n)=(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)$$

Définition (combinaison linéaire de vecteurs)

Soit $u_1,\ldots,u_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Une combinaison linéaire de $u_1,\ldots,u_n$ est un vecteur de la forme :

$$\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_n u_n$$

où les α_i sont les coefficients (réels) de la combinaison linéaire.

Définition (sev engendré par des vecteurs)

Soit $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
L'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_n$ est défini par :

$$Vect(u_1, \ldots, u_n) = \left\{ \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}$$

On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \ldots, u_n$.

EXPERT Sous espace vectoriel

Cette partie $F = Vect(u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifie les conditions suivantes :

- $F \neq \emptyset$
- F est stable par addition (interne) : $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$
- F est stable par multiplication (externe) : $\forall u \in F,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha u \in F$

Une telle partie est un sous-espace vectoriel (sev) de $\mathbb{R}^n$.
En fait, $Vect(u_1, \ldots, u_n)$ est le plus petit sev de $\mathbb{R}^n$ contenant $u_1, \ldots, u_n$.

Définition (droite vectorielle, plan vectoriel)

Soit u, v des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec $u \neq (0, \ldots, 0)$.

- $Vect(u)$ est la droite vectorielle engendrée par u. C'est l'ensemble des vecteurs dits colinéaires à u.
- **Si** v **n'est pas colinéaire à** u c'est à dire $v \notin Vect(u)$, alors $Vect(u, v)$ est le plan vectoriel engendré par u et v.

Définition (base canonique de $\mathbb{R}^n$)

Notons $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, ..., $e_n = (0,\dots,0,1)$.
Chaque vecteur $(x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $e_1,e_2,\dots,e_n$:

$$(x_1,\dots,x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

On dit que :

- les vecteurs $e_1,e_2,\dots,e_n$ forment une base de $\mathbb{R}^n$
- $x_1,\dots,x_n$ sont les coordonnées de $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base canonique [a] $(e_1,\dots,e_n)$
- $\mathbb{R}^n$ est de dimension n

a. La base est dite *canonique* car elle est « naturelle » : les coordonnées dans cette base sont rien d'autres que les composantes !

EXPERT Vecteurs linéairement indépendants

n vect. $u_1, \dots, u_n$ forment une base de $\mathbb{R}^n$ ssi ils sont linéairement indépendants :

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R},\ (\alpha_1 u_1 \dots + \alpha_n u_n = 0_E) \Rightarrow (\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0)$$

On notera que :

- deux vect. u_1, u_2 sont lin. indépendants ssi ils sont non colinéaires
- trois vect. u_1, u_2, u_3 sont lin. indépendants ssi ils sont non coplanaires [a]

On verra plus loin que :

- n vect. $u_1, \dots, u_n$ sont lin. indépendants ssi $det(u_1, \dots, u_n) \neq 0$

Cette dernière caractérisation est à privilégier en dimension finie, mais elle n'est plus disponible en dimension infinie...

On remarquera enfin qu'une base de $\mathbb{R}^n$ compte toujours n vecteurs (linéairement indépendants), ce nombre commun à toutes les bases correspond précisément à la définition de la dimension.

a. Attention, trois vecteurs peuvent être non colinéaires deux à deux, mais coplanaires !

Dans l'espace-temps $\mathbb{R}^4$

Déterminer [a] les coordonnées de $(2,4,1,3)$ dans les bases suivantes :

1. $\big((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\big)$
2. $\big((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\big)$
3. $\big((1,0,1,2),(0,1,0,3),(0,0,1,1),(1,0,1,1)\big)$

a. en résolvant, par la méthode du pivot de Gauss, un système de quatre éq. à quatre inc. α, β, γ et δ

On verra plus loin comment obtenir matriciellement les coordonnées dans une base à partir de celles dans la base canonique.

En fait, $\mathbb{R}^n$ muni de l'add. (int.) et de la mult. (ext.) est un espace vectoriel (ev)...

Vannes
Université Bretagne Sud

Définition ($\mathbb{R}$-ev ou plus simplement ev)

Un ev est un ensemble E muni de deux opérations :

- une addition (interne) notée $+ : E \times E \to E$
- une multiplication (externe) notée $. : E \times \mathbb{R} \to E$

L'addition (interne) doit être une opération :

- associative : $\forall u, v, w \in E,\ u + (v + w) = (u + v) + w$
- commutative : $\forall u, v \in E,\ u + v = v + u$
- avec un élément neutre noté 0_E ou 0 : $\forall u \in E,\ u + 0 = u$
- pour laquelle tout vecteur admet un symétrique : $\forall u \in E, u + (-u) = 0$

Et la multiplication (externe) doit vérifier :

- $\forall u \in E,\ 1.u = u$
- $\forall u, v \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$
- $\forall u \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u$
- $\forall u \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ (\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$

- Un ev E n'admet qu'un seul élément neutre, appelé aussi vecteur nul, ce qui légitime la notation 0_E
- Dans un ev, un vecteur u n'admet qu'un seul symétrique, appelé aussi opposé, ce qui légitime la notation $-u$
- Pour accéder à la notion d'orthogonalité, on doit disposer d'un produit scalaire...

D'autres espaces vectoriels « connus »

Propriété (ev des suites réelles)

L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni des opérations définies par :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\alpha(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

forme un ev (de dimension infinie) dont le vecteur nul est la suite nulle.

Propriété (ev des applications réelles d'une variable réelle)

L'ensemble des applications réelles d'une variable réelle $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ muni des opérations définies par :

- $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$
- $\alpha f : x \mapsto \alpha f(x)$

forme un ev (de dimension infinie) dont le vecteur nul est l'application nulle.

? Comprenez-vous les notations $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ au regard de $\mathbb{R}^n$?

EXPERT D'autres espaces vectoriels « connus »

Propriété (ev des polynômes de degré inférieur ou égal à n)

L'ensemble des polynômes (à coefficents réels) de degré inférieur ou égal à n,

$$\mathbb{R}_n[X] = \left\{P : x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\right\}$$

est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et donc un ev (de dimension $n+1$) muni des mêmes opérations que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.