R1.07 - Outils fondamentaux
Cours 2 - Calcul matriciel

A. Ridard

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - l'icône en dessous du logo IUT
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

Plan du cours

1. Les matrices
2. L'addition (interne) et la multiplication (externe) par un réel
3. La multiplication matricielle
4. L'inversion de matrice
   - Matrice inversible
   - Détermination pratique de l'inverse

Définition (matrice)

Une matrice est un tableau dont les éléments sont repérés par un indice ligne suivi d'un indice colonne :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$$

L'ensemble des matrices à p lignes et n colonnes (à coeff. réels) est noté $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Vannes
Université Bretagne Sud

Définition (matrice ligne)

Une matrice ligne est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Les coefficients ne sont pas séparés par une virgule comme dans un n-uplet.

Définition (matrice colonne)

Une matrice colonne est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}$$

Un vecteur de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire un n-uplet, s'écrit toujours en ligne avec les composantes séparées par une virgule.

Définition (matrice carrée)

Une matrice est carrée si elle possède autant de lignes que de colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n (à coeff. réels) est noté simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition (matrice (carrée) triangulaire supérieure)

Une matrice (carrée) est triangulaire supérieure si tous les coefficients en dessous de la diagonale [a] sont nuls :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a. La diagonale va du coin supérieur gauche au coin inférieur droit

- Les coefficients diagonaux a_{ii} peuvent éventuellement être nuls
- On définit, suivant le même principe, une matrice (carrée) triangulaire inférieure

Définition (matrice (carrée) diagonale)

Une matrice (carrée) est diagonale si elle est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition (matrice (carrée) identité)

La matrice identité d'ordre n, notée I_n, est la matrice diagonale avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'addition de deux matrices se fait terme à terme :

Définition (addition)

L'addition de deux matrices de même taille[a] $p \times n$ est définie par :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}+b_{p1} & \dots & a_{pn}+b_{pn} \end{pmatrix}$$

a. Elles doivent avoir le même nombre de lignes p et le même nombre de colonnes n

La multiplication d'une matrice par un réel se fait également terme à terme :

Définition (multiplication par un réel)

La multiplication par $\lambda \in \mathbb{R}$ d'une matrice de taille $p \times n$ est définie par :

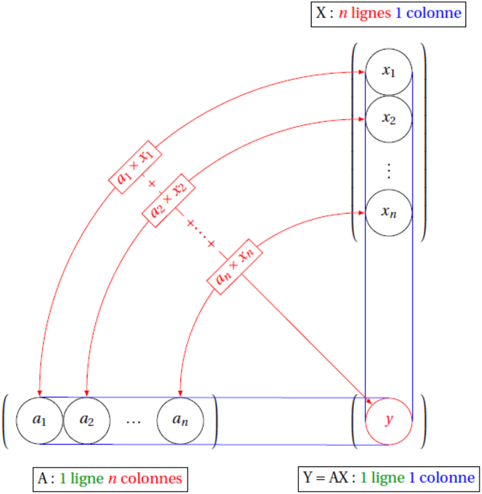
$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{p1} & \dots & \lambda a_{pn} \end{pmatrix}$$

EXPERT **Ev des matrices**

L'ensemble $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ muni de ces deux opérations est un ev de dimension finie égale à pn.

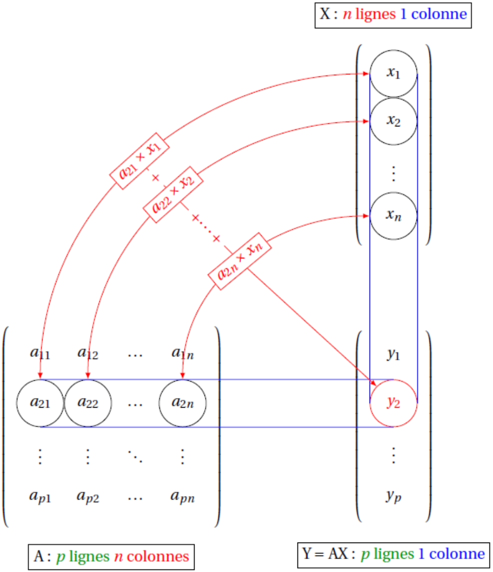
La multiplication matricielle ne se fait pas terme à terme. Ce produit existe, il est appelé produit d'Hadamard et est utilisé, par exemple, pour les filtres en traitement d'images ou pour caractériser l'anti-symétrie d'une relation dans un ensemble à partir de la matrice d'adjacence

Regardons d'abord la multiplication entre une mat. ligne et une mat. colonne :



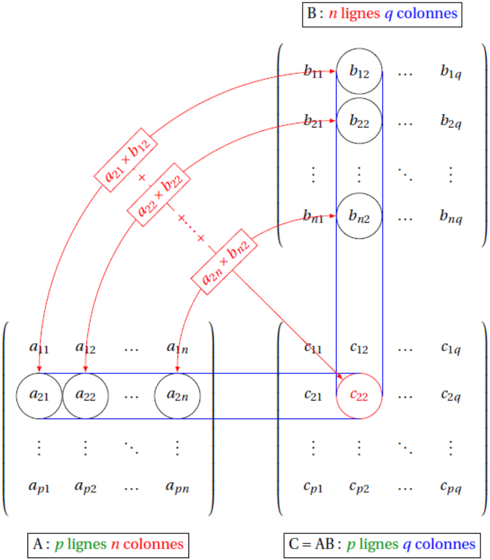
Calculer le produit $Y = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Regardons ensuite la multiplication entre une mat. (qcq) et une mat. colonne :



Calculer le produit $Y = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Regardons enfin la multiplication entre deux matrices « quelconques » :



1. Le produit matriciel est-il toujours bien défini ?
2. Calculer les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Que peut-on en déduire ?

Définition (matrice inversible et matrice inverse)

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n$$

Dans ce cas, B est unique, appelée matrice inverse de A et notée A^{-1}.

- Dans $\mathbb{R}$, 2 est inversible d'inverse $\frac{1}{2}$ car on a :

$$2 \times \frac{1}{2} = 1 \text{ et (par commutativité) } \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

  On note aussi $2^{-1} = \frac{1}{2}$
- Une matrice qui n'est pas carrée ne peut pas être inversible

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Contrairement à un réel non nul qui est toujours inversible, une matrice carrée non nulle ne l'est pas toujours.
Mais alors, comment peut-on décider si une matrice est inversible ou pas ?

Définition (déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Le déterminant de A, noté $det(A)$ ou $|A|$, est le réel défini par :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Définition (déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3)

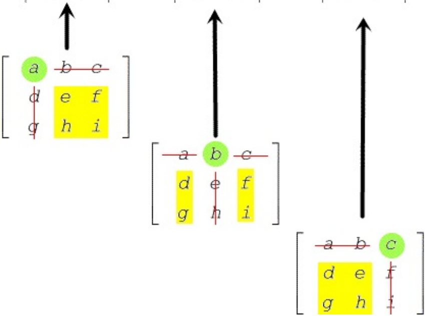
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Le déterminant de A est le réel défini par :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

On a "développé suivant la première ligne" :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$



En réalité, on peut développer suivant n'importe quelle ligne ou colonne.

Les signes des coefficients devant les déterminants d'ordre 2 changent :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

- Développement suivant la 2-ième ligne :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

- Développement suivant la 3-ième colonne :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

- On choisit la ligne ou la colonne contenant le maximum de 0
- On ne change pas le déterminant en remplaçant une ligne (resp. colonne) par la somme de cette ligne (resp. colonne) et d'une combinaison linéaire des autres. On peut ainsi faire apparaître des zéros, et faciliter le "développement"
- On peut, en généralisant, calculer des déterminants d'ordre supérieur

Lorsqu'on multiplie une ligne (resp. colonne) par un réel, le déterminant l'est également

Propriété (CNS d'inversibilité)

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Etudier l'inversibilité des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ce critère est effectivement bien pratique, mais alors comment peut-on déterminer (lorsqu'elle existe) la matrice inverse ?

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

Déterminer l'inverse de A revient à résoudre l'équation (matricielle) :

$$AX = B$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et de second membre $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En effet, en multipliant (à gauche) les deux membres par A^{-1}, il vient :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

ce qui fournit :

$$I_n X = A^{-1}B$$

ou encore :

$$X = A^{-1}B$$

Déterminons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en résolvant l'équation :

$$AX = B$$

d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et de second membre $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
c'est à dire l'équation :

$$\begin{pmatrix} x+z \\ 2x+2y+3z \\ -x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ou encore le système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & & +z & = & a \\ 2x & +2y & +3z & = & b \\ -x & +2y & +z & = & c \end{array} \right.$$

Pour cela, appliquons la méthode du pivot de Gauss :
On cherche d'abord un système équivalent "échelonné" :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \boxed{x} & & +z & = & a \\ 2x & +2y & +3z & = & b \\ -x & +2y & +z & = & c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & +z & = & a & & \\ & \boxed{2y} & +z & = & -2a+b & & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & 2y & +2z & = & a+c & & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccc} x & & +z & = & a & & & \\ & 2y & +z & = & -2a & +b & & \\ & & z & = & 3a & -b & +c & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

Ensuite, on résout le système "échelonné" en "remontant" :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & +z & = & a & & \\ & 2y & +z & = & -2a & +b & \\ & & z & = & 3a & -b & +c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} x & & +z & = & a & & \\ & y & & = & -\frac{5}{2}a & +b & -\frac{1}{2}c \\ & & z & = & 3a & -b & +c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} x & & & = & -2a & +b & -c \\ & y & & = & -\frac{5}{2}a & +b & -\frac{1}{2}c \\ & & z & = & 3a & -b & +c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

D'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- Les termes du second membre doivent être bien rangés
- N'oubliez pas de vérifier votre résultat

On peut présenter la démarche précédente de manière plus "simple" :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$$