R1.07 - Outils fondamentaux
Cours 3 - Interprétation en algèbre linéaire

A. Ridard

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - l'icône en dessous du logo IUT
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

Plan du cours

L'intérêt des matrices ne se limite pas à l'algèbre linéaire, vous verrez bientôt leur utilité en théorie des graphes...

1. Les matrices en algèbre linéaire
2. Interprétation de la multiplication matricielle
3. Les formules de changements de bases (hors programme)

Définition (matrice d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$)

Soit $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
On appelle matrice du vecteur u dans la base $\mathscr{B}$ la matrice colonne formée des coordonnées de u dans $\mathscr{B}$:

$$\mathscr{M}(u, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

- On notera simplement $\mathscr{M}(u)$ s'il s'agit de la base canonique
- Cette matrice dépend évidemment de la base choisie

On note $\mathscr{B} = \big((2,-1),(1,1)\big)$ et l'on considère $\mathscr{M}(u,\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer le vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ puis sa matrice $\mathscr{M}(u)$ dans la base canonique.

Définition (vecteur canoniquement associé à une matrice colonne)

Le vecteur canoniquement associé à la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est le vecteur u de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\mathscr{M}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Il s'agit du vecteur u de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées dans la base canonique sont $x_1, \ldots, x_n$ c'est à dire $u = (x_1, \ldots, x_n)$.

Vous connaissez bien les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$x \mapsto ax \quad \text{avec} \quad a, x \in \mathbb{R}.$$

Mais alors à quoi ressemblent les applications de la forme :

$$X \mapsto AX \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \text{ et } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})?$$

Par définition du produit matriciel,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ alors } AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n \end{pmatrix}.$$

Définition (application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$)

Une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est une application de la forme :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n)$$

EXPERT

Application linéaire

Définition (application linéaire ou morphisme d'ev)

Soit E, F deux ev et $f : E \to F$ une application.
On dit que l'application f est linéaire si :

- f respecte l'addition : $\forall u, v \in E,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$
- f respecte la multiplication : $\forall u \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Définition (matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$)

Soit $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}' = (v_1, \dots, v_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$ et f l'application linéaire définie [a] par :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ f(u_i) = a_{1i} v_1 + \cdots + a_{pi} v_p$$

On appelle matrice de f dans $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ la matrice formée, en colonnes, des coordonnées de $f(u_1), \dots, f(u_n)$ dans $\mathscr{B}'$:

$$\mathscr{M}(f, \mathscr{B}, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

a. EXPERT Pourquoi suffit-il de connaitre les $f(u_i)$?

- On notera simplement $\mathscr{M}(f)$ s'il s'agit des bases canoniques
- On notera plutôt $\mathscr{M}(f, \mathscr{B})$ si $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$
- Cette matrice dépend évidemment des bases choisies

1. Soit f l'application linéaire définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x-y+z, 2x+2y+6z+4t, -x-2z-t) \end{array}$$

Déterminer $\mathscr{M}(f)$.

2. Soit φ la forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+2y-z \end{array}$$

Déterminer $\mathscr{M}(\varphi)$.

3. Soit p la projection orthogonale sur $Vect((1,0))$ définie par :

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

Déterminer $\mathscr{M}(p)$.

4. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à $Vect((1,0))$ définie par :

$$s: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,-y) \end{array}$$

Déterminer $\mathscr{M}(s)$.

5. Soit h l'homothétie définie par :

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \lambda(x,y) \end{array} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Déterminer $\mathscr{M}(h)$.

Définition (application linéaire canoniquement associée à une matrice)

L'application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est l'app. linéaire f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ vérifiant $\mathscr{M}(f) = A$.

1. Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. De quelle transformation géométrique s'agit-il ?

EXPERT

A propos de l'addition (interne) et de la multiplication (externe)

- L'ensemble $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est un ev
- L'application $\begin{array}{rccc} \phi: & \mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \mathscr{M}(f) \end{array}$ est linéaire et bijective
- Cet « isomorphisme » permet de transformer un problème d'algèbre linéaire (de dimension finie) en un problème matriciel dont la résolution est plus pratique [a]

a. On peut par exemple utiliser la structure de tableaux dans les implémentations

Si A est la matrice de l'application linéaire f et X celle du vecteur x, alors AX sera celle du vecteur $f(x)$:

$$\boxed{\mathscr{M}(f)\mathscr{M}(x) = \mathscr{M}(f(x))}$$

Si A est la matrice de l'application linéaire f et B celle de l'application linéaire g, alors AB sera celle de l'application linéaire $f \circ g$:

$$\boxed{\mathscr{M}(f)\mathscr{M}(g) = \mathscr{M}(f \circ g)}$$

Mais alors, qu'en est-il de l'inversion de matrice ?

Si A est la matrice de l'application linéaire f, alors A est inversible ssi f est bijective.
Dans ce cas, on a :

$$\mathcal{M}(f)\mathcal{M}(f^{-1}) = I_n \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(f^{-1})\mathcal{M}(f) = I_n$$

Autrement dit, $\mathcal{M}(f)$ est inversible d'inverse $\mathcal{M}(f^{-1})$:

$$\boxed{\left(\mathcal{M}(f)\right)^{-1} = \mathcal{M}(f^{-1})}$$

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
On considère deux bases de $\mathbb{R}^n$:

- "l'ancienne"[1] $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$
- "la nouvelle" $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$

Se posent alors les questions suivantes :

- Comment obtenir $\mathscr{M}(u, \mathscr{B}')$ à partir de $\mathscr{M}(u, \mathscr{B})$?
- Comment obtenir $\mathscr{M}(f, \mathscr{B}')$ à partir de $\mathscr{M}(f, \mathscr{B})$?

1. Il s'agit souvent de la base canonique

En général, nous disposons des coordonnées de $e'_1, \dots, e'_n$ dans la base $\mathscr{B}$:

Définition (matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$)

La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est la donnée en colonnes des coordonnées de $e'_1, \dots, e'_n$ dans la base $\mathscr{B}$ ou encore :

$$P = \mathscr{M}(id, \mathscr{B}', \mathscr{B})$$

La base au départ est la nouvelle

Propriété (matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$)

$P = \mathscr{M}(id, \mathscr{B}', \mathscr{B})$ est inversible et $P^{-1} = \mathscr{M}(id, \mathscr{B}, \mathscr{B}')$

Propriété (formule de changement de base pour un vecteur)

En notant $X = \mathscr{M}(u, \mathscr{B})$ et $X' = \mathscr{M}(u, \mathscr{B}') = \mathscr{M}(id(u), \mathscr{B}')$, on a :

$$X' = P^{-1} X$$

⚠ C'est P^{-1} qui permet d'obtenir les nouvelles coordonnées

Enfin, considérons le diagramme de décomposition suivant :

$$\begin{tikzcd}
E,\mathscr{B} \arrow[rr, "f", "A"'] & & E,\mathscr{B} \arrow[d, "P^{-1}"', "id"] \\
E,\mathscr{B}' \arrow[u, "id", "P"'] \arrow[rr, "D", "f"'] & & E,\mathscr{B}'
\end{tikzcd}$$

où $A = \mathscr{M}(f,\mathscr{B})$ et $D = \mathscr{M}(f,\mathscr{B}')$.

Il exprime :

$$f = id \circ f \circ id$$

ce qui se traduit matriciellement par :

Propriété (formule de changement de base pour une application linéaire)

En notant $A = \mathscr{M}(f,\mathscr{B})$ et $D = \mathscr{M}(f,\mathscr{B}')$, on a :

$$D = P^{-1}AP$$

Soit f l'appl. linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la mat. dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère la famille formée des vecteurs :

$$e'_1 = (1,2,-1), e'_2 = (0,2,2) \text{ et } e'_3 = (1,3,1)$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans cette nouvelle base.

- L'intérêt est de "simplifier" la matrice de f
- La théorie de la diagonalisation explique comment choisir une telle base
- Pour montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit [a] de montrer que $\det(e'_1, e'_2, e'_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

a. La contraposée vous indique pourquoi