R1.07 - Outils fondamentaux
TD 1 - Calcul vectoriel

A. Ridard

Exercice 1.
A l'aide du Pivot de Gauss, déterminer les coordonnées de :

1. $(9,6)$ dans la base $\Big((2,-1),(1,1)\Big)$ de $\mathbb{R}^2$
2. $(5,10,-5)$ dans la base $\Big((1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)\Big)$ de $\mathbb{R}^3$
3. $(1,1,1,1)$ dans la base $\Big((1,1,1,2),(2,1,0,3),(-1,0,-1,4),(-9,-2,1,-2)\Big)$ de $\mathbb{R}^4$

Exercice 2.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, a-t-on $Vect(u,v) = Vect(u)$ pour :
   (a) $u = (0,1)$ et $v = (2,0)$?
   (b) $u = (-1,-2)$ et $v = (0,0)$?
   (c) $u = (-1,1)$ et $v = (-2,2)$?
2. Dans $\mathbb{R}^3$, a-t-on $Vect(u,v,w) = Vect(u,v)$ pour :
   (a) $u = (-1,1,-3)$, $v = (1,2,5)$ et $w = (1,7,1)$?
   (b) $u = (-2,3,7)$, $v = (1,-2,-3)$ et $w = (-1,-1,6)$?

Exercice 3.
On considère $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | ax+by=0\Big\}$ avec $b \neq 0$.
Montrer que D est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(-b,a)$.

Exercice 4.
On considère $P = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | ax+by+cz=0\Big\}$ avec $c \neq 0$.
Montrer que P est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $(-c,0,a)$ et $(0,-c,b)$.

Exercice 5.
On considère D l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax+by+cz & = & 0 \\ a'x+b'y+c'z & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Si $(a,b,c) = (1,1,2)$ et $(a',b',c') = (1,2,1)$, montrer que $D = Vect\Big((-3,1,1)\Big)$
2. Si $(a,b,c) = (1,1,1)$ et $(a',b',c') = (1,2,2)$, montrer que $D = Vect\Big((0,-1,1)\Big)$

Exercice 6.
On considère l'ensemble $V = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | \ x = y-3z \text{ et } z = 2t\Big\}$.

1. Déterminer les deux vecteurs qui engendrent V.
2. Pourquoi ces deux vecteurs forment-ils une base de V ?
3. Déterminer les coordonnées de $(7,1,-2,-1)$ dans cette base de V.
4. Le vecteur $(7,5,4,2)$ appartient-il à V ?

Exercice 7.
Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss.

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & & & + & 2z & & & = & 0 \\ & & 3y & + & z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 8.
Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$ par la méthode du pivot de Gauss dans les cas suivants.

1. $a = 2$ et $b = 1$
2. $a = 1$ et $b = 2$
3. $a = b = 1$
4. $a = b = -2$

Exercice 9.
Montrer que les bases de l'exercice 1 sont bien formées par des vecteurs linéairement indépendants.

Exercice 10.
Représenter graphiquement les ensembles suivants, et préciser si ce sont des sev de $\mathbb{R}^2$.
Gagnez du temps *: si un ensemble est "un $Vect$" c'est à dire un ensemble de combinaisons linéaires, alors c'est un sev !*

1. $A_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\right\}$
2. $A_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 1\right\}$
3. $A_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$
4. $A_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists a \in \mathbb{R},\ x = a \text{ et } y = -a\right\} = \left\{(a,-a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\right\}$
5. $A_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{Z}^2$

Exercice 11.
Indiquer si les ensembles suivants sont des sev.

1. Dans $\mathbb{R}^3$
   (a) $A_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - 7z = 0\right\}$
   (b) $A_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists a \in \mathbb{R},\ x = a, y = 2a \text{ et } z = 3a\right\}$
   (c) $A_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\right\}$
   (d) $A_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists a, b \in \mathbb{R},\ x = a + b,\ y = 2b \text{ et } z = -a\right\}$
2. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
   (a) $B_1 = \left\{\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}\right\}$
   (b) $B_2 = \left\{\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M\right\}$
3. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
   (a) $C_1 = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)\right\}$
   (b) $C_2 = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(-1) = 0\right\}$