R1.07 - Outils fondamentaux
TD 2 - Calcul matriciel

A. Ridard

Exercice 1.
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les produits BA et AC.
2. En déduire, de deux manières différentes, le produit BAC.
3. Quelle propriété de la multiplication matricielle est mise en évidence à la question précédente ?
4. Peut-on calculer le produit ABC ?

Exercice 2.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 - A = 4I_3$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 3.
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $AB = AC$.
2. En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 4.

1. A quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Dans ce cas, déterminer son inverse.
   Ce résultat pourra maintenant être utilisé directement.

2. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.
   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
   (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
   (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$. *On pourra effectuer la transformation, dans le calcul du déterminant,* $C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2$.

Exercice 5.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $C = AB$.
2. Calculer $\det(C - I)$ où I désigne la matrice identité d'ordre 3.
3. En déduire que $C - I$ est inversible et déterminer son inverse.