R1.07 - Outils fondamentaux

TD 3 - Interprétation en algèbre linéaire

A. Ridard

Exercice 1.
On considère (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $e_3 = e_1 + e_2$, et s la symétrie orthogonale par rapport à $Vect(e_3)$.

1. Déterminer la matrice A de s dans la base canonique.
2. Calculer la matrice $B = \dfrac{1}{2}(A + I_2)$. De quelle transformation géométrique s'agit-il (faire un dessin) ?

Exercice 2.
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

On note f (resp. g) l'application linéaire canoniquement associée à A (resp. B).

1. (a) Déterminer $f\Big((x, y, z)\Big)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer, à l'aide de $\det(A)$, que f est bijective.
   (c) Déterminer f^{-1}.
2. (a) Montrer, à l'aide de $\det(B)$, que g n'est pas bijective.
   (b) Déterminer $g^{-1}\Big(\big\{(0,0,0)\big\}\Big)$ sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré (Vect).
3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 3 (hors programme)**.**
On considère f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ associée à $A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ définis par :

$$u = (2, -1, -2), \;\; v = (1, 0, -1), \;\; w = (-2, 1, 3)$$

1. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On notera $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = (u, v, w)$.
2. Déterminer P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ (attention à l'ordre), puis la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.
3. En déduire les coordonnées de $(1, 2, 3)$ dans la base $\mathscr{B}'$.
4. A partir du diagramme de décomposition de f, déterminer $D = \mathscr{M}(f, \mathscr{B}')$.

Exercice 4 (Noyau d'une application linéaire)**.** EXPERT

Soit E, F deux ev et $f : E \to F$ une application linéaire.
Le noyau de f est l'image réciproque de $\{0_F\}$ par f :

$$Ker(f) = f^{-1}\Big(\{0_F\}\Big) = \Big\{u \in E \mid f(u) = 0_F\Big\}$$

1. Montrer que $Ker(f)$ est un sev de E.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_E\}$