R1.06 - Mathématiques discrètes
Cours 1 - Rudiments de logique

A. Ridard

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - l'icône en dessous du logo IUT
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

Plan du cours

Définition (assertion)

Une assertion est une « phrase mathématique syntaxiquement correcte » qui est soit vraie, soit fausse.

Dans ce qui suit, $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ désigneront des assertions.

Définition (négation)

La négation de $\mathscr{P}$ est l'assertion définie comme étant vraie lorsque $\mathscr{P}$ est fausse, et inversement.
On la notera « non($\mathscr{P}$) » ou encore $\neg\mathscr{P}$.

Autrement dit, la négation de $\mathscr{P}$ a pour table de vérité :

$\mathscr{P}$	$\neg\mathscr{P}$
V	F
F	V

Définition (conjonction)

La conjonction de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est l'assertion définie comme étant vraie si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ le sont toutes les deux, et fausse sinon.
On la notera « $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ » ou encore $\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}$.

Autrement dit, la conjonction de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ a pour table de vérité :

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Définition (disjonction)

La disjonction de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est l'assertion définie comme étant fausse si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ le sont toutes les deux, et vraie sinon.
On la notera « $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$ » ou encore $\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}$.

Le « ou » du langage commun est *exclusif* alors que le « ou » logique est *inclusif*

Autrement dit, la disjonction de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ a pour table de vérité :

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Définition (équivalence logique)

On dit que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont logiquement équivalentes si elles ont la même table de vérité. On notera alors $\mathscr{P} \sim \mathscr{Q}$.

- Pour ne pas confondre avec l'équivalence usuelle [a], « $\mathscr{P} \sim \mathscr{Q}$ » pourra se lire « $\mathscr{P}$ a même table de vérité que $\mathscr{Q}$ »
- On utilisera surtout cette notion pour transformer une assertion, en particulier grâce aux règles suivantes

a. L'équivalence usuelle notée $\Longleftrightarrow$ sera définie plus tard

Propriété (idempotence)

- $(\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{P}) \sim \mathscr{P}$
- $(\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{P}) \sim \mathscr{P}$

Propriété (commutativité)

- $(\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{Q}) \sim (\mathscr{Q} \text{ et } \mathscr{P})$
- $(\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q}) \sim (\mathscr{Q} \text{ ou } \mathscr{P})$

Propriété (associativité)

- $(\mathscr{P} \text{ et } (\mathscr{Q} \text{ et } \mathscr{R})) \sim ((\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{Q}) \text{ et } \mathscr{R})$
- $(\mathscr{P} \text{ ou } (\mathscr{Q} \text{ ou } \mathscr{R})) \sim ((\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q}) \text{ ou } \mathscr{R})$

On peut alors supprimer les parenthèses lorsqu'il n' y a que des conjonctions (resp. disjonctions)

Propriété (distributivité)

- $(\mathscr{P} \text{ et } (\mathscr{Q} \text{ ou } \mathscr{R})) \sim ((\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{Q}) \text{ ou } (\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{R}))$
- $(\mathscr{P} \text{ ou } (\mathscr{Q} \text{ et } \mathscr{R})) \sim ((\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q}) \text{ et } (\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{R}))$

Même s'il existe des règles de priorités (d'abord négation, puis conjonction, et enfin disjonction), on évitera de supprimer les parenthèses lorsqu'il y a différentes opérations

Dans ce qui précède, on effectue les transformations suivantes [a] :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Faux} & \longmapsto & 0 \\
\text{Vrai} & \longmapsto & 1 \\
\mathscr{P},\mathscr{Q},\mathscr{R} & \longmapsto & x,y,z \\
\text{non}(.) & \longmapsto & \bar{.} \\
\text{et} & \longmapsto & \times \\
\text{ou} & \longmapsto & + \\
\sim & \longmapsto & =
\end{array}$$

a. On définit ainsi l'algèbre de Boole $\mathbb{B} = \left(\{0,1\},\Psi,\times,+\right)$ et ses règles de calcul, particulièrement utile à la conception des circuits logiques en informatique

1. Compléter les tables de multiplication et d'addition suivantes :

$\times$	0	1
0		
1		

$+$	0	1
0		
1		

2. Énoncer les deux distributivités.
3. Ces notations $\times$ et $+$ sont-elles dangereuses ?

Propriété (lois de Morgan)

- $(\text{non}(\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{Q})) \sim (\text{non}(\mathscr{P}) \text{ ou } \text{non}(\mathscr{Q}))$
- $(\text{non}(\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q})) \sim (\text{non}(\mathscr{P}) \text{ et } \text{non}(\mathscr{Q}))$

Démontrer cette propriété (en comparant les tables de vérité)

Définition (implication)

L'implication « $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ » est l'assertion définie comme étant fausse si $\mathscr{Q}$ est fausse alors que $\mathscr{P}$ est vraie, et vraie sinon.

Autrement dit, l'implication « $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ » a pour table de vérité :

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Propriété (contraposition)

$$(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}) \sim (\mathrm{non}(\mathscr{Q}) \Longrightarrow \mathrm{non}(\mathscr{P}))$$

- On dit que « $\mathrm{non}(\mathscr{Q}) \Longrightarrow \mathrm{non}(\mathscr{P})$ » est la *contraposée* de « $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ »

- Démontrer cette propriété

Propriété (négation d'une implication)

$$\big(\text{non}(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q})\big) \sim \big(\mathscr{P} \text{ et } \text{non}(\mathscr{Q})\big)$$

1. Démontrer cette propriété
2. En déduire : $\big(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}\big) \sim \big(\text{non}(\mathscr{P}) \text{ ou } \mathscr{Q}\big)$.
   Ce résultat pourra maintenant être utilisé directement

Définition (équivalence)

L'équivalence « $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$ » est l'assertion définie comme étant vraie si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ont même valeur de vérité.

Autrement dit, l'équivalence « $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$ » a pour table de vérité :

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Propriété (double implication)

$$(\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}) \sim ((\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}) \text{ et } (\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}))$$

Transformer en une assertion logiquement équivalente exprimée uniquement avec des négations et des conjonctions :

1. $\text{non}(\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q})$
2. $\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q}$
3. $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$
4. $\text{non}(\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q})$

Lorsque la valeur de vérité de $\mathscr{P}$ dépend d'un paramètre x, cette assertion peut être notée $\mathscr{P}(x)$ afin de souligner cette dépendance.

Définition (quantification universelle)

La quantification universelle « $\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ » est l'assertion définie comme étant vraie si $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour tout élément x de l'ensemble [a] E.

a. On reviendra sur la notion d'ensemble plus tard

Définition (quantification existentielle)

La quantification existentielle « $\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ » est l'assertion définie comme étant vraie si $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour au moins un élément x de l'ensemble E.

- Les symboles $\forall$ et $\exists$ se lisent « quelque soit » et « il existe »
- La variable x est dite muette (on peut la remplacer par une autre, y par exemple, sans changer la valeur de vérité)

Quand l'assertion suivante est-elle vraie ?

$$\Big(\big(\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)\big) \text{ et } \big(\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ (\mathscr{P}(x) \text{ et } \mathscr{P}(x')) \Longrightarrow (x = x')\big)\Big)$$

On la notera plus simplement :

$$\exists\,!\ x \in E,\ \mathscr{P}(x)$$

Axiome (négation d'une phrase quantifiée)

- $\text{non}(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)) \sim \exists x \in E,\ \text{non}(\mathscr{P}(x))$
- $\text{non}(\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)) \sim \forall x \in E,\ \text{non}(\mathscr{P}(x))$

Dans une théorie formelle, mathématique ou non, un axiome est une assertion considérée comme étant vraie sans justification, servant ainsi de point de départ. Une théorie est alors un empilement ordonné d'axiomes, de démonstrations et de propriétés appelées aussi théorèmes, incluant également des définitions pour créer des classes d'objets.

Dans cette partie, nous présentons les raisonnements de base utilisés en Mathématiques, accompagnés de leur rédaction  .

Nous nous limitons ici aux cas les plus fréquents, mais un exposé exhaustif est disponible en annexe.

Présentons d'abord deux techniques générales de démonstration.

Vannes iut Université Bretagne Sud

Propriété (par déduction)

On détermine une assertion vraie $\mathscr{Q}$ telle que « $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$ » soit vraie.

Lorsque l'implication « $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$ » est vraie, on dit que :

- $\mathscr{Q}$ est une condition suffisante pour avoir $\mathscr{P}$
- ou encore, il suffit d'avoir $\mathscr{Q}$ pour avoir $\mathscr{P}$

Mais, on dit aussi que :

- $\mathscr{P}$ est une condition nécessaire pour avoir $\mathscr{Q}$
- ou encore, il faut avoir $\mathscr{P}$ pour avoir $\mathscr{Q}$

L'implication vraie « $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$ » peut représenter une propriété du cours exprimée sous la forme « Si $\mathscr{Q}$, alors $\mathscr{P}$ ».
En montrant que l'*hypothèse* $\mathscr{Q}$ est vraie, on est bien certain que la *conclusion* $\mathscr{P}$ le soit aussi (savez-vous pourquoi ?)

On pourra évidemment utiliser un « enchaînement d'implications ».

Ne surtout pas utiliser le connecteur logique « $\Longrightarrow$ » à la place du mot « donc » dans une démonstration par déduction.
En général, on évitera de mélanger dans une même phrase le langage mathématique et le langage commun.

$\mathscr{Q}$ est vraie
Or $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$ est vraie
Donc $\mathscr{P}$ est vraie

Plus simplement [a], on écrira :

$\mathscr{Q}$
Or $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$
Donc $\mathscr{P}$

---

a. En logique, on doit toujours préciser la valeur de vérité d'une assertion (elle peut être soit vraie, soit fausse). En Mathématiques, lorsque l'on écrit une assertion sans préciser sa valeur de vérité, c'est qu'elle est vraie ! Par exemple, on n'écrit pas « $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ est vraie », mais simplement « $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ ». Dès à présent, sauf dans les explications des raisonnements logiques qui suivent (pour un maximum de clarté), on préférera ce langage simplifié.

1. Démontrer « $\ln(\pi) > 0$ » en utilisant[a] « $\pi > 1 \Longrightarrow \ln(\pi) > 0$ ».
2. L'implication « $\pi < 1 \Longrightarrow \ln(\pi) > 0$ » est-elle vraie ? Permet-elle de démontrer « $\ln(\pi) > 0$ » ?

a. Il est entendu que cette implication est vraie

Propriété (par équivalence)

On détermine une assertion vraie $\mathscr{Q}$ telle que « $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$ » soit vraie.

Lorsque l'équivalence « $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$ » est vraie, on dit que :

- $\mathscr{Q}$ est une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\mathscr{P}$
- ou encore, il faut et il suffit d'avoir $\mathscr{Q}$ pour avoir $\mathscr{P}$

L'équivalence vraie « $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$ » peut représenter une propriété du cours appelée *caractérisation*.
En montrant que $\mathscr{Q}$ est vraie, on est bien certain que $\mathscr{P}$ le soit aussi (savez-vous pourquoi ?)

Cette technique est à privilégier lorsque la démonstration de $\mathscr{P}$ n'est pas « évidente ». Elle permet en fait de transformer l'assertion à démontrer $\mathscr{P}$ en une assertion ayant même valeur de vérité $\mathscr{Q}$ mais plus simple à démontrer !

$\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$
Or $\mathscr{Q}$
Donc $\mathscr{P}$

Pour rappel, cela signifie :

$\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$ est vraie
Or $\mathscr{Q}$ est vraie
Donc $\mathscr{P}$ est vraie

Démontrer « La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty, 0]$ » en utilisant[a] la caractérisation :

$$\left(x \mapsto x^2 \text{ est décroissante sur }]-\infty, 0]\right) \Longleftrightarrow \left(\forall x \in]-\infty, 0],\ 2x \leq 0\right)$$

a. Là encore, il est entendu que cette équivalence est vraie, c'était le dernier rappel ;)

Pour exploiter ces deux techniques, il faut savoir démontrer une implication et une équivalence.

Propriété (directement)

On suppose $\mathscr{P}$ vraie, et on montre que $\mathscr{Q}$ l'est aussi.

Supposons $\mathscr{P}$
Montrons $\mathscr{Q}$
$\left.\begin{array}{c}\vdots\end{array}\right\}$ Preuve de $\mathscr{Q}$

Étant donné un réel $x \in [0,1]$, démontrer « $x - x^2 \in \mathbb{N} \Longrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$ »

Propriété (par contraposition)

On démontre « $\mathrm{non}(\mathscr{Q}) \Longrightarrow \mathrm{non}(\mathscr{P})$ ».

Cette technique est à privilégier lorsque $\mathrm{non}(\mathscr{P})$ est plus facile à démontrer que $\mathscr{Q}$

Raisonnons par contraposition, et supposons $\mathrm{non}(\mathscr{Q})$
Montrons $\mathrm{non}(\mathscr{P})$

$\left.\begin{array}{c}\vdots\end{array}\right\}$ Preuve de $\mathrm{non}(\mathscr{P})$

Étant donné n un entier naturel, démontrer « $n^2 \text{ pair} \Longrightarrow n \text{ pair}$ ».

Propriété (directement)

On utilise une « suite d'équivalences » en modifiant peu à peu $\mathscr{P}$ en $\mathscr{Q}$.

- Se méfier des fausses équivalences

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \Longleftrightarrow & \dots \\ & \Longleftrightarrow & \dots \\ & \Longleftrightarrow & \mathscr{Q} \end{array}$$

Étant donné un réel x strictement positif, démontrer
« $(x^2 - 4x + 3)(1 - \ln x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x = e$ »

Propriété (par double implication)

On démontre « $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ » et « $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$ »

Cette technique est à privilégier lorsque la méthode *directe* ne convient pas (c'est très souvent le cas)

Montrons $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$:

Supposons $\mathscr{P}$
Montrons $\mathscr{Q}$
$\left.\begin{matrix}\vdots\end{matrix}\right\}$ Preuve de $\mathscr{Q}$

Montrons $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$:

Supposons $\mathscr{Q}$
Montrons $\mathscr{P}$
$\left.\begin{matrix}\vdots\end{matrix}\right\}$ Preuve de $\mathscr{P}$

Étant donnés deux réels x et y, démontrer « $x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0$ ».

Expliquons enfin comment démontrer une assertion qui commence par un quantificateur.

Propriété (en introduisant une variable)

On considère un x quelconque de E que l'on fixe le temps de la preuve, et on montre que $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

⚠

Le langage commun « masque » parfois la quantification universelle.
Par exemple, l'exercice précédent consiste en fait à démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \left(x^2 \geq 1 \text{ ou } (x-2)^2 \geq 1\right)$$

On peut aussi revenir sur l'exercice qui s'intéresse à la parité de la somme d'un entier naturel avec son carré.

Soit $x \in E$
Montrons $\mathscr{P}(x)$

$\left.\vdots\right\}$ Preuve de $\mathscr{P}(x)$

Démontrer « $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{x}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$ »

Propriété (de manière constructive)

On détermine (concrètement) un x qui convient.

Cette méthode permet, en particulier, de montrer qu'une quantification universelle est fausse.
Le x qui convient est alors un contre-exemple !

Posons [a] $x = \ldots$

Vérifions $\mathscr{P}(x)$

$\left.\begin{matrix}\vdots\end{matrix}\right\}$ Vérification de $\mathscr{P}(x)$

a. Trouver un x qui convient n'est pas toujours évident, ni même faisable

1. A-t-on « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq x$ » ?
2. Démontrer « $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ z > x + y$ » [a].
3. A-t-on « $\exists z \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ z > x + y$ » ?

---

a. Par abus, on regroupe x et y derrière le même quantificateur $\forall$ au lieu de :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ z > x + y$$