R1.06 - Mathématiques discrètes
Cours 2 - Ensemble

A. Ridard

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
    - le menu (en haut à gauche)
    - l'icône en dessous du logo IUT
    - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

Plan du cours

Définition (ensemble)

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments de cet ensemble.

- Pour signifier l'appartenance (resp. la non appartenance) d'un élément x à un ensemble E, on écrit :

$$x \in E \quad (\text{resp. } x \notin E)$$

- L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé l'ensemble vide, et est noté $\emptyset$

- Un ensemble [a] peut être défini :
  - en extension [b] : $E = \{1, 2, 3\}$
  - en pseudo-extension [c] : $E = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$
- Dans un ensemble :
  - il n'y a pas de doublon (deux fois le même élément)
  - l'ordre d'écriture des éléments n'a pas d'importance : $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$
- Même si les éléments d'un ensemble peuvent être a priori de natures différentes [d], ça n'arrive pas en Mathématiques [e]

---

a. Toujours noté avec des accolades

b. Ses éléments sont explicitement décrits

c. Certains éléments sont sous-entendus et remplacés par ...

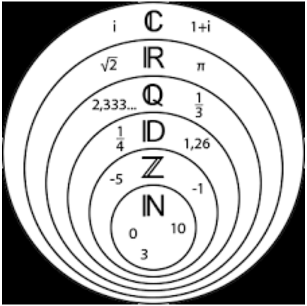
d. Ce n'est pas rare en Informatique théorique où le formalisme mathématique est d'ailleurs très présent !

e. On verra pourquoi plus tard avec la notion de structure algébrique.

Définition (inclusion - partie)

Un ensemble F est inclus dans un ensemble E si tous les éléments de F appartiennent à E.
On notera alors $F \subset E$, et on dira que F est une partie ou un sous-ensemble de E.

Nous manipulerons des ensembles de nombres



Mais aussi des ensembles de couples, de fonctions, de suites, de matrices, ...

Point de vue logique

L'inclusion ensembliste correspond à l'implication logique :

$$(F \subset E) \Longleftrightarrow (\forall x \in F,\ x \in E) \Longleftrightarrow (x \in F \Longrightarrow x \in E)$$

Pour démontrer $F \subset E$

Soit $x \in F$
Montrons $x \in E$

$$\left.\begin{array}{c}\vdots\end{array}\right\}\ \text{Preuve de } x \in E$$

Cette notion fournit une autre manière de définir un ensemble lorsqu'il s'agit d'une partie :

$$F = \{x \in E \mid \mathscr{P}(x)\}$$

Autrement dit,

$$\forall x \in E,\ \big(x \in F \Longleftrightarrow \mathscr{P}(x)\big)$$

Cette définition de l'ensemble F est dite en compréhension [a]

a. Ses éléments ne sont pas explicitement décrits, mais sont déterminés par une condition (nécessaire et suffisante) d'appartenance

Démontrer $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}_+,\ x \geq y\} \subset \mathbb{R}_+$.

Définition (égalité)

Deux ensembles sont égaux s'ils possèdent exactement les mêmes éléments.

Point de vue logique

L'égalité ensembliste correspond à l'équivalence logique :

$$(E = F) \Longleftrightarrow (x \in E \Longleftrightarrow x \in F)$$

Propriété (double inclusion)

$$(E = F) \Longleftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E)$$

Cette *caractérisation* fournit une méthode pour démontrer l'égalité entre deux ensembles

Démontrer $\{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}_+,\ x \leq y\} = \mathbb{R}_-$.

Raisonner par analyse-synthèse

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = \sqrt{4x+5}$, autrement dit déterminer l'ensemble des solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{4x+5}\right\}$$

D'abord (analyse), on recherche tous les candidats possibles de sorte que $\mathscr{S} \subset \{\text{candidats possibles}\}$.
Ensuite (synthèse), on ne garde que les candidats qui conviennent de sorte que $\mathscr{S} = \{\text{candidats qui conviennent}\}$.
Pour un modèle de rédaction, on pourra se reporter à la démonstration de l'unicité puis de l'existence.

On considère A, B et C trois parties d'un ensemble E.

Définition (ensemble des parties)

L'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$, est constitué [a] de toutes les parties de E.

a. Comme son nom l'indique !

- Comme $A \subset E$, il est évident que $A \in \mathscr{P}(E)$
- Nous allons donc définir ci-dessous des opérations agissant sur les éléments de $\mathscr{P}(E)$

Déterminer $\mathscr{P}(E)$ dans chacun des cas suivants :

1. $E = \{1, 2\}$
2. $E = \{1, 2, 3\}$
3. $E = \{1\}$
4. $E = \emptyset$
5. $E = \mathscr{P}\big(\{1\}\big)$

Définition (complémentaire)

Le complémentaire de A (dans E) est l'ensemble défini par :

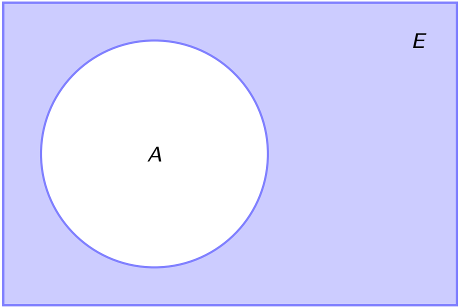
$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Point de vue logique

La complémentarité ensembliste correspond à la négation logique :

$$\forall x \in E,\ \left(x \in \overline{A} \Longleftrightarrow x \notin A \Longleftrightarrow \mathrm{non}(x \in A)\right)$$

Diagramme de Venn



Définition (intersection)

L'intersection de A et B est l'ensemble défini par :

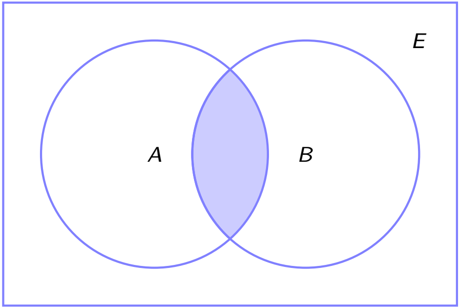
$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Point de vue logique

L'intersection ensembliste correspond à la conjonction logique :

$$\forall x \in E, \ (x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B)$$

Diagramme de Venn



Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints

Définition (union)

L'union de A et B est l'ensemble défini par :

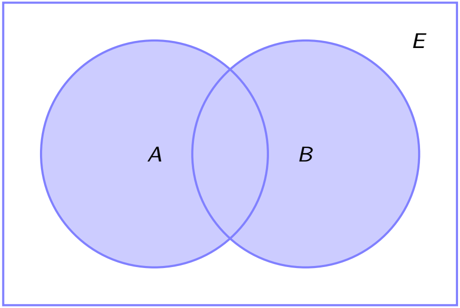
$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Point de vue logique

L'union ensembliste correspond à la disjonction logique :

$$\forall x \in E, \ (x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Diagramme de Venn



On considère encore A, B et C trois parties d'un ensemble E.

Par négation, conjonction et disjonction, on vérifie les propriétés suivantes :

Propriété (idempotence)

- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$

Propriété (commutativité)

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

Propriété (associativité)

- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

On peut alors supprimer les parenthèses lorsqu'il n'y a que des intersections (resp. unions)

Propriété (distributivité)

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Même s'il existe des règles de priorités (d'abord complémentarité, puis intersection, et enfin union), on évitera de supprimer les parenthèses lorsqu'il y a différentes opérations

Propriété (lois de Morgan)

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Propriété (neutralité)

- $A \cap E = A$
- $A \cup \emptyset = A$

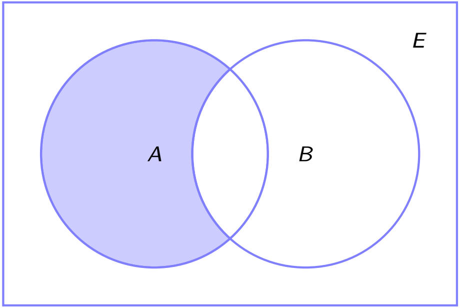
On considère A et B deux parties d'un ensemble E.

Définition (différence)

La différence de A et B est l'ensemble défini par :

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

Diagramme de Venn

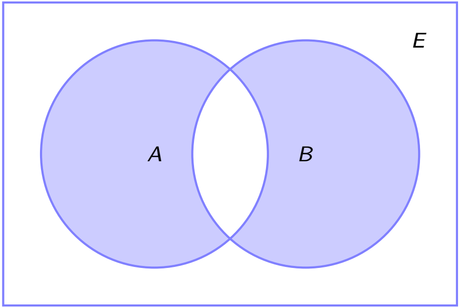


Définition (différence symétrique)

La différence symétrique de A et B est l'ensemble défini par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Diagramme de Venn



1. Montrer $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
2. Montrer $A \setminus B = C \Longrightarrow A \cup B = B \cup C$

Définition (produit cartésien)

Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble défini par :

$$E \times F = \{(x,y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Un élément (x,y) d'un tel ensemble est appelé couple et vérifie :

$$(x,y) = (x',y') \Longleftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$$

- Si $E = F$, on note plus légèrement E^2 au lieu de $E \times E$
- Le produit cartésien de trois ensembles E, F et G est défini par :

$$E \times F \times G = \left(E \times F\right) \times G$$

  Ses éléments se nomment des triplets et se visualisent sous la forme (x, y, z) avec x dans E, y dans F et z dans G
- Plus généralement, on définit par récurrence le produit cartésien de $n \geq 3$ ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$:

$$E_1 \times \cdots \times E_{n-1} \times E_n = \left(E_1 \times \cdots \times E_{n-1}\right) \times E_n$$

  Ses éléments se nomment des n-uplets et se visualisent sous la forme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec x_i dans E_i

Au niveau des BDD

On considère le contenu d'une table de colonnes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ à un instant donné.

Une ligne peut être modélisée par un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
L'ensemble des lignes apparaît alors comme une partie du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ où E_i désigne le domaine de C_i c'est à dire l'ensemble des valeurs possibles, a priori, pour un élément x_i de C_i.