R1.06 - Mathématiques discrètes
Cours 3 - Relation binaire de E vers F

A. Ridard

Vannes
iut
Université Bretagne Sud

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - l'icône en dessous du logo IUT
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

Plan du cours

On considère E, F et G des ensembles.

Définition (relation binaire de E vers F)

Une relation binaire de E vers F est un triplet $\mathscr{R} = (E, F, U)$ où U désigne une partie de $E \times F$.

- E est appelé l'ensemble de départ et F celui d'arrivée
- Par abus [a], on dit qu'une relation binaire de E vers F est (tout simplement) une partie de $E \times F$ (le U de la définition)
- Pour définir une telle relation, on note :

$$\forall x \in E, \forall y \in F,\ x\ \mathscr{R}\ y \Longleftrightarrow (x, y) \in U$$

  $x\ \mathscr{R}\ y$ se lit « x est en relation avec y »
- Lorsque x n'est pas en relation avec y, on note : $x\ \not\mathscr{R}\ y$

a. lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E et F

Diagramme sagittal

On considère la relation binaire $\mathscr{R} = (E, F, U)$ avec $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$ et $U = \{(a,1), (a,2), (b,3), (c,2)\}$.

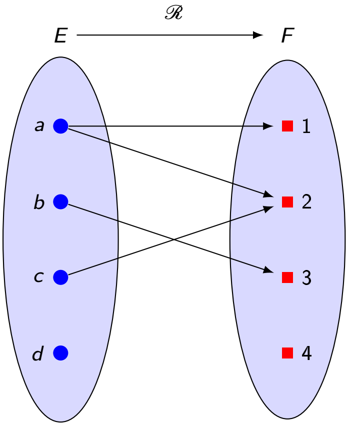
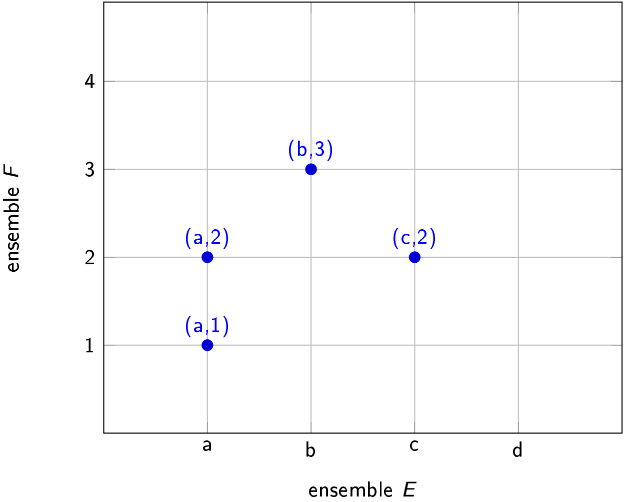


Diagramme cartésien

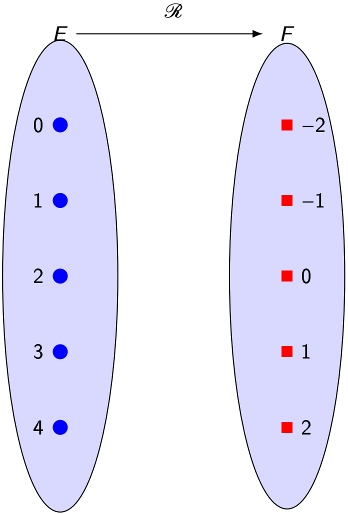
On considère encore la relation binaire $\mathscr{R} = (E, F, U)$ avec $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$ et $U = \{(a,1), (a,2), (b,3), (c,2)\}$.

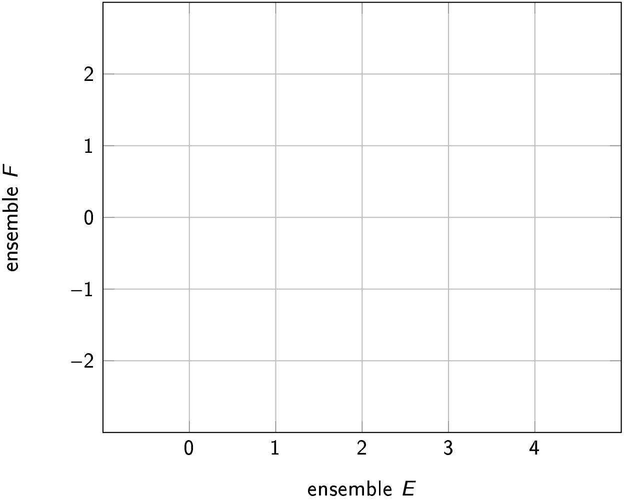


On considère $E = \{0,1,2,3,4\}$, $F = \{-2,-1,0,1,2\}$ et $\mathscr{R}$ la relation binaire de E vers F définie par :

$$\forall x \in E, \forall y \in F,\ x \ \mathscr{R}\ y \Longleftrightarrow x = y^2$$

Compléter les diagrammes ci-dessous :


$\mathscr{R}$
E
F
0
1
2
3
4
−2
−1
0
1
2


2
1
0
−1
−2
ensemble F
0
1
2
3
4
ensemble E

Définition (fonction)

Une fonction est une relation binaire où tout élément au départ est en relation avec au plus un élément à l'arrivée.

On considère encore $E = \{0,1,2,3,4\}$, $F = \{-2,-1,0,1,2\}$ et $\mathscr{R}$ la relation binaire de E vers F définie par :

$$\forall x \in E, \forall y \in F,\ x\ \mathscr{R}\ y \iff x = y^2$$

1. $\mathscr{R}$ est-elle une fonction de E vers F ?
2. A partir de $\mathscr{R}$, on peut définir une nouvelle relation de F vers E appelée « relation réciproque de $\mathscr{R}$ », et notée $\mathscr{R}^{-1}$:

$$\forall y \in F, \forall x \in E,\ y\ \mathscr{R}^{-1}\ x \iff\ x\ \mathscr{R}\ y$$

   1. Représenter le diagramme sagittal de $\mathscr{R}^{-1}$.
   2. $\mathscr{R}^{-1}$ est-elle une fonction de F vers E ?
   3. A quelle condition une relation réciproque est-elle une fonction ?

- Une fonction se note en général f plutôt que $\mathscr{R}$, et on écrit $y = f(x)$ plutôt que $x\ f\ y$
- Lorsque $y = f(x)$, on dit que :
  - y est l'image de x par f ou encore y est la valeur de f en x
  - x est un antécédent de y par f
- En fait, une fonction f de E vers F se note :

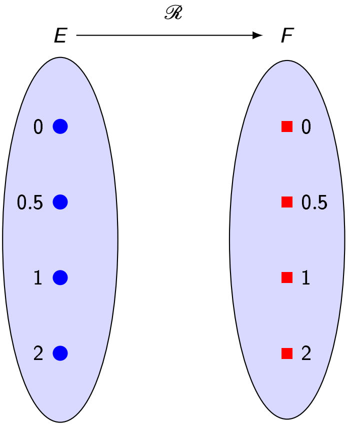
$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

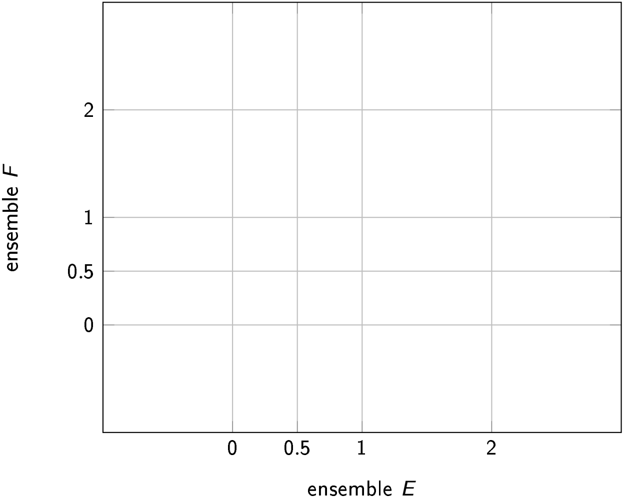
- En Mathématiques, il est commun de définir une fonction f en donnant l'expression permettant de « calculer » $f(x)$

On considère $E = F = \{0, 0.5, 1, 2\}$ et f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

1. Est-il toujours possible de « calculer » $f(x)$?
2. Compléter les diagrammes suivants.


$\mathscr{R}$
E
F
0
0.5
1
2
0
0.5
1
2


ensemble F
2
1
0.5
0
0
0.5
1
2
ensemble E

Définition (ensemble de définition)

L'ensemble de définition d'une fonction f de E vers F est constitué des éléments au départ possédant une image :

$$\mathbb{D}_f = \{x \in E \mid f(x) \text{ existe}\}$$

Définition (application)

Une application est une fonction où tout élément au départ possède une image.

- Une application désigne en fait une fonction où l'ensemble de définition est l'ensemble de départ tout entier
- En Mathématiques, on ne s'intéresse qu'aux applications [a]
- En Informatique, on parle de « fonction totale » plutôt que d'application, et de « fonction partielle » plutôt que de fonction. Cette dernière notion y est d'ailleurs très présente : un programme définit en général une « fonction partielle » car on ne peut pas limiter le domaine du paramètre en entrée (excepté son type éventuellement), ce qui ne doit pas l'empêcher de respecter la spécification qui peut, quant à elle, limiter le domaine du paramètre en entrée.
- En BDD, une clé étrangère traduit une relation fonctionnelle de la table contenant la clé vers la table référencée par la clé. Avec une contrainte d'existence sur la clé (valeur NULL non autorisée), cette fonction devient une application.

---

a. Dans l'étude d'une fonction, on commence toujours par déterminer son ensemble de définition pour s'y restreindre !

Définition (injection)

Une application de E vers F est injective si tout élément à l'arrivée admet au plus un antécédent, autrement dit si deux éléments différents au départ ont des images différentes :

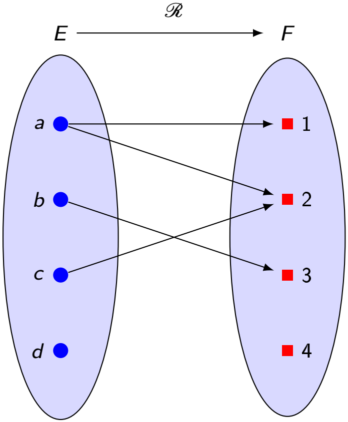
$$\forall x, x' \in E,\ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

- Pour démontrer l'injectivité d'une application, on préfère la contraposée :

$$\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

- Une application est injective si elle ne prend jamais deux fois la même valeur

Revenons sur notre première relation :



1. $\mathscr{R}$ est-elle une fonction ?
2. **On retire de $\mathscr{R}$ le couple $(a,1)$.**
   1. Obtient-on une fonction ?
   2. Obtient-on une application ?
   3. **On retire de E l'élément d.**
      1. Obtient-on une application ?
      2. Est-elle injective ?
      3. La relation réciproque est-elle une fonction ?
3. **On retire [a] de $\mathscr{R}$ le couple $(a,2)$.**
   1. Obtient-on une fonction ?
   2. Obtient-on une application ?
   3. **On retire de E l'élément d.**
      1. Obtient-on une application ?
      2. Est-elle injective ?
      3. La relation réciproque est-elle une fonction ?
      4. La relation réciproque est-elle une application ?
      5. A quelle condition la relation réciproque serait-elle une application ?

a. Les modifications réalisées dans la question 2. ne sont évidemment plus valables

Définition (surjection)

Une application de E vers F est surjective si tout élément à l'arrivée possède au moins un antécédent :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$$

Une application est surjective si elle prend toutes les valeurs à l'arrivée

Définition (bijection)

Une application de E vers F est bijective si tout élément à l'arrivée possède exactement un antécédent :

$$\forall y \in F,\ \exists\,!\ x \in E,\ y = f(x)$$

Une application est bijective si elle prend toutes les valeurs à l'arrivée une fois et une seule

Définition (application réciproque d'une bijection)

Lorsqu'une application f de E vers F est bijective, on peut définir son application réciproque par :

$$\begin{array}{rcccl} f^{-1}: & F & \longrightarrow & E & \\ & y & \longmapsto & x & \text{tel que} \quad y = f(x) \end{array}$$

- L'image de y par f^{-1} est son unique antécédent par f
- Cette application f^{-1} est également bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$
- Cette définition coïncide avec celle de relation réciproque

Contrairement à $\mathscr{R}^{-1}$ qui est toujours bien définie, f^{-1} n'existe pas si f n'est pas une application bijective

On considère l'application f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$$

Montrer que f est bijective et préciser f^{-1}.

Propriété (caractérisation d'une bijection)

Une application de E vers F est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Définition (composition)

Étant données deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$, la composée de g par f est l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & E & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

- La composition est associative, mais pas commutative

Propriété (autre caractérisation d'une bijection)

Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que :

$$g \circ f = Id_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = Id_F$$

Dans ce cas, g est l'application réciproque de f.

Id_E est l'application « identité sur E » définie par :

$$Id_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

Les deux égalités sont nécessaires (cf. exercice suivant)

On considère f et g les applications définies par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & 2k \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est injective mais pas surjective.
2. Montrer que g est surjective mais pas injective.
3. Montrer que $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ mais $f \circ g \neq Id_{\mathbb{N}}$

On considère une application $f : E \to F$.

Définition (image directe)

L'image directe de $A \subset E$ par f est la partie de F définie par :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}$$

- $f(A)$ est l'ensemble des images des éléments de A
- En particulier, $f(E)$ qui désigne l'ensemble des valeurs prises par f est appelée « l'image de f » et notée $Im(f)$
- L'application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $Im(f) = F$
- En restreignant l'ensemble d'arrivée d'une application à son image, on peut toujours la rendre surjective

Définition (image réciproque)

L'image réciproque de $B \subset F$ par f est la partie de E définie par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

- $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents des éléments de B
- Cette notation ne présume pas de l'existence de f^{-1} autrement dit $f^{-1}(B)$ existe même si f n'est pas bijective
- Heureusement, si f est bijective, l'image réciproque de B par f coïncide avec l'image directe de B par f^{-1}

On considère l'application f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

1. Déterminer $Im(f)$, $f([-1,2])$ et $f^{-1}([1,4[)$
2. f est-elle surjective ? f est-elle injective ?
3. Montrer la bijectivité de l'application $\tilde{f}$, induite [a] par f, définie par :

$$\tilde{f}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

   Préciser l'application réciproque de $\tilde{f}$.
4. Déterminer $\left(\tilde{f}\right)^{-1}\left(]4,9]\right)$

a. La « formule » ne change pas, seuls les ensembles de départ et d'arrivée sont modifiés

Définition (ensemble fini - cardinal)

L'ensemble E est fini s'il est en bijection avec l'ensemble [a] $\{1,\ldots,n\}$ pour une certaine valeur de $n \in \mathbb{N}$.
Ce naturel n est alors unique, il s'appelle le cardinal de E et se note $Card(E)$.

a. Par convention, on considère que $\{1,\ldots,0\} = \emptyset$

- L'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ est aussi désigné par $[\![1,n]\!]$
- En notant $\varphi : [\![1,n]\!] \to E$ une telle bijection, et en posant $x_i = \varphi(i)$, on obtient une « description » de E :

$$E = \{x_1,\ldots,x_n\}$$

- Lorsque E n'est pas fini, on dit dit qu'il est infini [a], et on note $Card(E) = +\infty$

a. Parmi les ensembles infinis, ceux qui sont en bijection avec $\mathbb{N}$ sont appelés les ensembles dénombrables.
Une telle bijection fournit alors une « description » de la forme :

$$E = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$$

Propriété (cardinal d'une union)

Soit A, B deux parties de E.
Si A et B sont finies, alors $A \cup B$ et $A \cap B$ le sont aussi, et on a :

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

- Sans déterminer $A \cap B$, on peut toujours affirmer :

$$Card(A \cup B) \leq Card(A) + Card(B)$$

- Si A et B sont disjointes, on a évidemment :

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$$

- En particulier, avec $B = \overline{A}$, il vient :

$$Card(E) = Card(A) + Card(\overline{A})$$

Propriété (cardinal d'une partie)

Soit A une partie de E.
Si E est fini, alors A l'est aussi et $Card(A) \leq Card(E)$.
De plus, $A = E$ si et seulement si $Card(A) = Card(E)$.

Propriété (condition nécessaire de bijectivité)

Soit $f : E \to F$ une application.

- Si f est injective et F fini, alors E l'est aussi et $Card(E) \leq Card(F)$
- Si f est surjective et E fini, alors F l'est aussi et $Card(E) \geq Card(F)$
- Si f est bijective et l'un des ensembles (E ou F) fini, alors l'autre l'est aussi et $Card(E) = Card(F)$

Pour qu'une application entre deux ensembles finis soit bijective, il faut qu'ils aient le même cardinal. Cette condition n'est pas suffisante [a], mais lorsqu'elle est remplie, on dispose d'une caractérisation « efficace » de la bijectivité.

a. Savez-vous le prouver ?

Propriété (caractérisation « efficace » d'une bijection)

Soit $f : E \to F$ une application avec $Card(E) = Card(F) < +\infty$. Alors, on a :

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

Propriété (cardinal du produit cartésien)

Si E et F sont finis, alors $E \times F$ l'est aussi et $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$.

Propriété (cardinal de l'ensemble des parties)

Si E est fini, alors l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ de ses parties l'est aussi et $Card(\mathscr{P}(E)) = 2^{Card(E)}$

Démontrer cette propriété en identifiant une partie de E à un mot binaire de longueur $Card(E)$.

On considère un ensemble E de cardinal n et un entier p inférieur (ou égal) à n.

Définition (p-liste)

Une p-liste formée d'éléments de E est un choix ordonné de p éléments de E avec répétition possible :

$$(x_1, \dots, x_p) \qquad \text{avec } x_i \in E$$

Une telle p-liste s'identifie à une application de $[\![1, p]\!]$ vers E, x_i désignant l'image de l'entier i.
Compter le nombre d'applications de $[\![1, p]\!]$ vers E revient donc à compter le nombre de p-listes.

Propriété (nombre de p-listes)

Le nombre de p-listes formées d'éléments de E est n^p.

Définition (p-arrangement)

Un p-arrangement formé d'éléments de E est un choix ordonné de p éléments de E sans répétition possible :

$$(x_1,\dots,x_p) \qquad \text{avec} \quad x_i \in E \quad \text{et} \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$$

Un tel p-arrangement s'identifie à une injection de $[\![1,p]\!]$ vers E, x_i désignant l'image de l'entier i.
Compter le nombre d'injections de $[\![1,p]\!]$ vers E revient donc à compter le nombre de p-arrangements.

Propriété (nombre de p-arrangements)

Le nombre de p-arrangements formés d'éléments de E est $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$.

Définition (permutation)

Une permutation de E est un n-arrangement formé d'éléments de E.

Une telle permutation s'identifie à une bijection de $[\![1,n]\!]$ vers E, x_i désignant l'image de l'entier i.
Compter le nombre de bijections de $[\![1,n]\!]$ vers E revient donc à compter le nombre de permutations.

Propriété (nombre de permutations)

Le nombre de permutations de E est $n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1 = n\,!$

Définition (p-combinaison)

Une p-combinaison formée d'éléments de E est un choix non ordonné de p éléments de E sans répétition possible :

$$\{x_1, \ldots, x_p\} \qquad \text{avec} \quad x_i \in E \quad \text{et} \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$$

Une telle p-combinaison s'identifie à une partie de E à p éléments.
Compter le nombre de parties de E à p éléments revient donc à compter le nombre de p-combinaisons.

Propriété (nombre de p-combinaisons)

Le nombre de p-combinaisons formées d'éléments de E est :

$$\frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$.

1. Combien de mots de longueur 3 est-il possible de construire ?
2. Combien de mots de longueur 3, avec des lettres toutes distinctes, est-il possible de construire ?
3. Combien de mots de longueur 3, avec des lettres toutes distinctes et sans d, est-il possible de construire ?
4. Combien de mots de longueur 3, avec des lettres toutes distinctes, est-il possible de construire, à une permutation près des lettres ?