R1.06 - Mathématiques discrètes
Cours 4 - Relation binaire sur E

A. Ridard

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - l'icône en dessous du logo IUT
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

Plan du cours

On considère E un ensemble.

1. Définition et propriétés
2. Une relation qui permet de « classifier » : la relation d'équivalence
3. Une relation qui permet de « comparer » : la relation d'ordre

Définition (relation binaire sur E)

Une relation binaire sur E est une relation binaire de E vers E.

Diagramme sagittal

On considère la relation binaire sur $E = \{1,2,3,4\}$ définie par $U = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$.

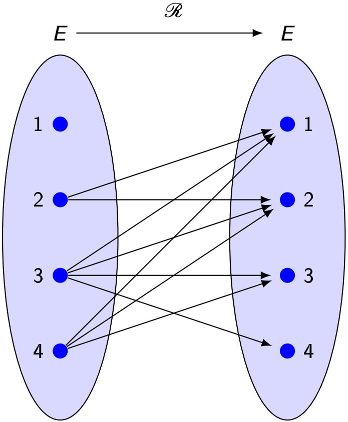
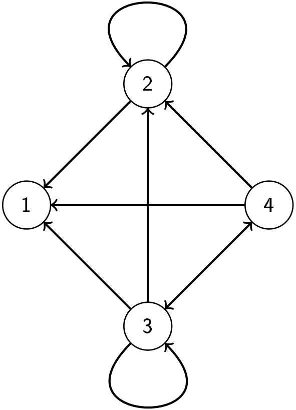


Diagramme sagittal

Lorsque les ensembles au départ et à l'arrivée coïncident, on préfère la représentation sous forme de « graphe [a] » :



a. On y reviendra dans un prochain module, mais on peut déjà parler de sommets pour les éléments de E et d'arcs pour les couples de U

Dans la suite de cette section 1, $\mathscr{R}$ désigne une relation binaire sur E.

Définition (réflexivité, symétrie, antisymétrie et transitivité)

- $\mathscr{R}$ est réflexive lorsque : $\forall x \in E,\ x \mathscr{R} x$
- $\mathscr{R}$ est symétrique lorsque : $\forall x, y \in E,\ x \mathscr{R} y \Longrightarrow y \mathscr{R} x$
- $\mathscr{R}$ est antisymétrique lorsque : $\forall x, y \in E,\ (x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} x) \Longrightarrow x = y$
- $\mathscr{R}$ est transitive lorsque : $\forall x, y, z \in E,\ (x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} z) \Longrightarrow x \mathscr{R} z$

Seule l'égalité vérifie ces quatre propriétés

Propriété (caractérisation par le « graphe »)

- $\mathscr{R}$ est réflexive si et seulement si chaque sommet possède une boucle
- $\mathscr{R}$ est symétrique si et seulement si chaque arc est à double sens
- $\mathscr{R}$ est antisymétrique si et seulement si aucun arc n'est à double sens (excepté les boucles éventuelles)
- $\mathscr{R}$ est transitive si et seulement si pour chaque couple d'arcs adjacents, le « raccourci » est un arc du graphe

L'antisymétrie n'est pas la négation de la symétrie.

- Donner un exemple de relation symétrique et antisymétrique
- Donner un exemple de relation ni symétrique, ni antisymétrique

Modifier (le moins possible) la relation $\mathscr{R}$ du début pour qu'elle soit (chaque cas est indépendant) :

- réflexive
- symétrique
- antisymétrique
- transitive

Définition (relation d'équivalence)

Une relation d'équivalence est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive.

- Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence, on note souvent $x \sim y$ plutôt que $x \mathrel{\mathscr{R}} y$
- Si $x \sim y$, on dit que x et y sont « équivalents »
- Une relation d'équivalence se comprend souvent comme une égalité « modulo » certains critères.
  En réunissant entre eux les éléments équivalents, on définit le concept suivant.

Dans la suite de cette section 2, $\sim$ désigne une relation d'équivalence sur E.

Définition (classe d'équivalence)

La classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ est l'ensemble des éléments de E équivalents à x :

$$Cl(x) = \{y \in E \mid y \sim x\}$$

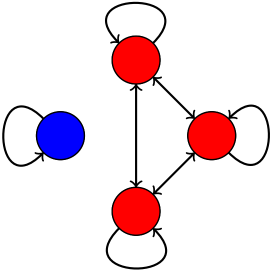
L'élément « privilégié » x qui permet de désigner sa classe d'équivalence est appelé un représentant de cette classe.

Propriété (partition)

Les classes d'équivalence forment une partition[a] de E.

a. Elles sont non vides, disjointes deux à deux et leur union est égale à E

Voici une relation d'équivalence et sa partition :



On considère la relation binaire sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall m, n \in \mathbb{Z},\ m \mathscr{R} n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ m - n = 3k$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence [a].

On note $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence [b] :

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{Cl(0), Cl(1), Cl(2)\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

a. Il s'agit de la congruence modulo 3 que l'on note souvent : $m \equiv n \mod 3$

b. On choisit souvent le reste dans la division euclidienne par 3 comme représentant

Définition (relation d'ordre)

Une relation d'ordre est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.

- La relation $\leq$ d'infériorité (au sens large) sur un ensemble de nombres est une relation d'ordre
- Si $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre, on note souvent $x \preceq y$ plutôt que $x \mathscr{R} y$
- Si $x \preceq y$, on dit que x est « plus petit que » y ou que y est « plus grand que » x

Définition (diagramme de Hasse)

Un diagramme de Hasse est un « graphe allégé » spécifique aux relations d'ordre :

- les sommets sont positionnés du plus petit au plus grand [a]
- les boucles sont omises (sous-entendues par réflexivité)
- les raccourcis sont omis (sous-entendus par transitivité)

a. de la gauche vers la droite ou de bas en haut

On considère $E = \{a, b, c\}$ et $\mathscr{R}$ la relation binaire sur $\mathscr{P}(E)$ définie par :

$$\forall A, B \in \mathscr{P}(E),\ A \mathrel{\mathscr{R}} B \Longleftrightarrow A \subset B$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre.
2. Représenter son diagramme de Hasse (de bas en haut).

Dans la suite de cette section 3, $\preceq$ désigne une relation d'ordre sur E [1].

1. On dit alors que E est ordonné

Définition (ordre total/partiel)

L'ordre est total si tous les éléments de E sont « comparables » deux à deux :

$$\forall x, y \in E,\ x \preceq y \quad \text{ou} \quad y \preceq x$$

Sinon, l'ordre n'est que partiel.

- La relation $\leq$ d'infériorité (au sens large) sur un ensemble de nombres est un ordre total
- La relation $\subset$ d'inclusion (au sens large) sur $\mathscr{P}(E)$ n'est qu'un ordre partiel

On considère enfin une partie A de E.

Définition (maximum)

S'il existe, le maximum de A est l'élément de A plus grand que tous les autres :

$$\max(A) \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A,\ x \preceq \max(A)$$

- On parle aussi du plus grand élément de A
- On définit de manière analogue, s'il existe, le minimum (ou le plus petit élément) de A que l'on note $\min(A)$
- un extremum est un maximum ou un minimum

Démontrer l'unicité du maximum de A.

Définition (majorant)

Un élément $M \in E$ est un majorant de A s'il est plus grand que tous les éléments de A :

$$\forall x \in A, \ x \leq M$$

- On définit de manière analogue un minorant de A
- S'il existe, le maximum de A est un majorant de A

Définition (borne supérieure)

Si elle existe [a], la borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A :

$$\sup(A) = \min\left(\{M \in E \mid \forall x \in A,\ x \preceq M\}\right)$$

a. Elle est définie comme le minimum d'une partie

- On définit de manière analogue, si elle existe, la borne inférieure de A que l'on note $\inf(A)$
- Si le maximum de A existe, la borne supérieure de A aussi et les deux coïncident
- Si la borne supérieure de A existe et si elle est dans A, le maximum de A existe aussi et les deux coïncident

Définition (élément maximal)

Un élément $M' \in A$ est maximal dans A s'il n'existe pas d'élément dans A plus grand que lui :

$$\forall x \in A,\ M' \leq x \Longrightarrow x = M'$$

- On définit de manière analogue un élément minimal dans A
- S'il existe, le maximum de A est maximal dans A
- Lorsque l'ordre est total, un élément maximal dans A est le maximum de A

On reprend la relation d'inclusion sur $\mathscr{P}(E)$ avec $E = \{a, b, c\}$.

1. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ admet-il un maximum (resp. minimum) ?
2. On considère $A = \mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$.
   1. La partie A admet-elle un minimum ?
   2. La partie A admet-elle un maximum ?
   3. La partie A admet-elle une borne supérieure ?
   4. La partie A admet-elle des éléments maximaux ?
3. On considère $B = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\Big\}$.
   1. La partie B admet-elle un minimum ?
   2. La partie B admet-elle un maximum ?
   3. La partie B admet-elle une borne supérieure ?
   4. La partie B admet-elle des éléments maximaux ?