R1.06 - Mathématiques discrètes
TD 1 - Rudiments de logique

A. Ridard

$\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ désignent des assertions (atomiques).

Exercice 1.
Démontrer les équivalences logiques suivantes :
- $\big(\mathscr{P} \text{ ou } (\mathscr{Q} \text{ et } \mathscr{R})\big) \sim \big((\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q}) \text{ et } (\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{R})\big)$
- $\big(\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}\big) \sim \big((\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}) \text{ et } (\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P})\big)$

Exercice 2.
On considère l'assertion $\mathscr{S}$ définie par :

$$\mathscr{S} \sim \big(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}\big) \land \neg\mathscr{R}$$

1. Décomposer $\mathscr{S}$ à l'aide de son arbre syntaxique [1].
2. Représenter la table de vérité de $\mathscr{S}$.
3. Transformer $\mathscr{S}$ en une assertion équivalente ne contenant que les connecteurs $\neg$, $\land$ et $\lor$.
4. Poursuivre la transformation de manière à s'affranchir du connecteur $\land$.

Exercice 3.
On considère $\mathscr{S}$ la réciproque [2] de l'implication $\mathscr{P} \Longrightarrow \big(\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}\big)$:

$$\mathscr{S} \sim \big(\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}\big) \Longrightarrow \mathscr{P}$$

1. Représenter la table de vérité de $\mathscr{S}$.
2. Transformer $\mathscr{S}$ en une assertion équivalente ne contenant que les connecteurs $\neg$, $\land$ et $\lor$.
3. Poursuivre la transformation de manière à s'affranchir du connecteur $\lor$.

Exercice 4.
Que signifient les phrases quantifiées suivantes où f désigne une application [3] de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0 \Longrightarrow f(x) \geq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$
4. $\exists A \in \mathbb{R},\ \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq A \Longrightarrow f(x) = C$

Exercice 5.
Exprimer à l'aide d'une phrase quantifiée chacune des assertions suivantes où f désigne une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1. f est l'application nulle
2. f s'annule
3. f ne peut s'annuler que sur $\mathbb{R}_+$
4. f s'annule au plus une fois

[1]. Cette décomposition permet, par exemple, de vérifier que l'assertion est bien définie
[2]. La réciproque de l'implication $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ est l'assertion définie par $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$
[3]. On reviendra sur les applications réelles dans le module d'analyse, vos connaissances de Terminale doivent suffire ici

Exercice 6.
Écrire la négation de chacune des assertions suivantes où f désigne une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \Longrightarrow x \geq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 1 \quad \text{ou} \quad f(x) \leq -1$
4. $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ f(x) > M$
5. $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(0)| < \epsilon$

Exercice 7.
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Longrightarrow x \geq 3$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ x < y \Longrightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$
3. $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ x < \sqrt{x}$
4. $\forall x \in [1,2[,\ \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2} \geq 0$
5. $\forall x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ x \neq x' \Longrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} \neq \dfrac{x'+1}{x'-1}$
6. $\forall x \in \left[-\dfrac{5}{4}, +\infty\right[,\ x = \sqrt{4x+5} \Longleftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

Exercice 8.
On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il peut alors s'écrire sous la forme d'une fraction **irréductible** $\dfrac{p}{q}$ avec p, q des entiers naturels.

1. Montrer que p^2 est pair, et en déduire que p l'est aussi.
2. Montrer que q est alors également pair.
3. Que peut-on conclure quant à $\sqrt{2}$?
4. On vient de faire un raisonnement par l'absurde en déterminant une assertion fausse $\mathcal{Q}$ telle que « non$(\mathcal{P}) \Longrightarrow \mathcal{Q}$ » soit vraie.
   (a) Préciser les assertions $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$ utilisées.
   (b) Justifier ce raisonnement à l'aide de la table de vérité de l'implication « non$(\mathcal{P}) \Longrightarrow \mathcal{Q}$ ».

Exercice 9.
Exprimer à l'aide d'une phrase quantifiée, puis démontrer l'assertion suivante :

Tout nombre rationnel peut s'écrire comme somme de deux nombres irrationnels

Indice : on pourra utiliser l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

Exercice 10.
Exprimer à l'aide d'une phrase quantifiée, puis démontrer chacune des assertions suivantes :

1. $x^2 + x + 1$ est strictement positif quelle que soit la valeur du réel x.
2. Lorsque n est un entier naturel, le nombre $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$ l'est aussi.
3. Lorsque le produit de deux réels est nul, l'un des facteurs (au moins) est nul.

Exercice 11.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer les deux implications suivantes :

1. $\left(\forall \epsilon \geq 0,\ |a| \leq \epsilon\right) \Longrightarrow a = 0$
2. $\left(\forall \epsilon > 0,\ |a| \leq \epsilon\right) \Longrightarrow a = 0$

Exercice 12.
On considère la suite [4] $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$$

Démontrer qu'elle est bornée par 0 et 4.

[4]. On reviendra sur les suites réelles dans le module d'analyse, vos connaissances de Terminale doivent suffire ici