R1.06 - Mathématiques discrètes
TD 2 - Ensemble

A. Ridard

Exercice 1.
On considère l'ensemble $E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ et $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{1,3,5\}$, $C = \{0,1,2\}$ trois de ses parties.

Résoudre dans $\mathscr{P}(E)$ chacune des équations ensemblistes suivantes :
1. $B \cap X = \{3\}$
2. $B \cup X = \{1,2,3,4,5\}$
3. $C \cap X = \emptyset$
4. $C \cup X = B$
5. $C \cap X = B$
6. $B \cup X = A$

Exercice 2.
Écrire en langage mathématique les ensembles suivants :
1. Les entiers naturels divisibles par 7.
2. Les fractions d'entiers dont le dénominateur est une puissance de 3.
3. Les entiers qui sont la somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 3.
Montrer que :
1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 = 4x - 2\} \subset \mathbb{R}_+$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R},\ x = 2t \quad \text{et} \quad y = t^2 + 1\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$

Exercice 4.
1. On considère les ensembles $A = \{1,2\}$ et $B = \{2,3\}$.
   (a) A-t-on $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$?
   (b) A-t-on $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$?
2. Soit A et B deux ensembles.
   (a) A-t-on $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$?
   (b) A-t-on $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$?

Exercice 5. EXPERT
Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que :
1. $\left(\overline{A \cap B}\right) \setminus C = \left(\overline{C} \setminus B\right) \cup \left(\overline{A} \setminus C\right)$
2. $A \cup B = B \cap C \iff A \subset B \subset C$
3. $\left(E = A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap C \subset B \quad \text{et} \quad B \cap C \subset A\right) \Longrightarrow C \subset A \cap B$
4. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

Exercice 6. EXPERT
Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$.
1. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\overline{A}$, $A\Delta E$ et $A\Delta\emptyset$
2. Démontrer l'associativité : $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$
3. Démontrer l'implication : $A\Delta B = A\Delta C \Longrightarrow B = C$