R1.06 - Mathématiques discrètes
TD 3 - Relation binaire de E vers F

A. Ridard

Exercice 1.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.
Montrer que si f est strictement croissante [1], alors elle est injective.

Exercice 2.
On considère E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. Étant données A, A' deux parties de E, montrer : $A \subset A' \Longrightarrow f(A) \subset f(A')$.
2. Étant données B, B' deux parties de F, montrer : $B \subset B' \Longrightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

Exercice 3.
On considère E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. Soit A, A' deux parties de E. Montrer :
   (a) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
   (b) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$
2. Montrer : $\big(\forall A, A' \subset E,\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')\big) \Longleftrightarrow f$ injective
3. Soit B, B' deux parties de F. Montrer :
   (a) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
   (b) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

Exercice 4 (hors programme)**.**
On considère l'alphabet $\Sigma = \{A, B, \dots, Z\}$ et le langage $\mathscr{L} = \Sigma^4$ constitué des mots de longueur 4.
Calculer le cardinal de la partie formée des mots :

1. contenant les lettres I, N, F et O
2. du langage régulier dénoté par $IUT(A|B|\dots|Z)$ que l'on notera plus simplement $IUT\Sigma$
3. du langage régulier dénoté par $\Sigma AR\Sigma$
4. du langage régulier dénoté par $\Sigma^3 Z$
5. du langage régulier dénoté par $IUT\Sigma|\Sigma AR\Sigma$
6. du langage régulier dénoté par $\Sigma^3 Z|\Sigma AR\Sigma$
7. contenant 4 lettres distinctes
8. contenant 4 lettres distinctes dont Z
9. contenant 4 lettres distinctes dont A et R
10. contenant 4 lettres distinctes dont I, U et T
11. contenant exactement 3 lettres distinctes
12. contenant la lettre Z
13. contenant les lettres I, U et T

Exercice 5.
Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable [2] en considérant l'application
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

[1]. $\forall x, y \in I,\ x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$
[2]. En bijection avec $\mathbb{N}$