R1.06 - Mathématiques discrètes
TD 4 - Relation binaire sur E

A. Ridard

Exercice 1 (relation de commensurabilité)**.**
On considère la relation binaire sur $[0,+\infty[$ définie par :

$$\forall x,y\in[0,+\infty[,\ x\ \sim\ y \Longleftrightarrow \exists k,l\in\mathbb{N}^*,\ kx=ly$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence [1].
2. Décrire la classe d'équivalence de $x\in[0,+\infty[$.
3. A-t-on $\sqrt{2}\in Cl(1)$?

Exercice 2. EXPERT
Soit E,F deux ensembles et $f:E\to F$ une application.
On considère la relation binaire sur E définie par :

$$\forall x,y\in E,\ x\ \sim\ y \Longleftrightarrow f(x)=f(y)$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence de $x\in E$ que l'on notera $\overline{x}$.
3. Dans cette question, on suppose que E,F sont des **espaces vectoriels** et que f est une **application linéaire**.
   (a) Reformuler la relation d'équivalence $\sim$ à l'aide du noyau de f.
   (b) On note $E/Ker(f)$ l'ensemble des classes d'équivalence et l'on considère le « passage au quotient » de f :

$$\overline{f}:\ \begin{array}{ccc} E/Ker(f) & \longrightarrow & F \\ \overline{x} & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

      i. Montrer que $\overline{f}$ est bien définie.
      ii. Montrer que $\overline{f}$ est injective.

Exercice 3 (preuve par 9)**.**
Formaliser et justifier la « preuve [2] par 9 » présentée dans cette **vidéo** à l'aide de la congruence modulo 9.

Exercice 4 (divisibilité dans $\mathbb{N}^*$)**.**
On considère la relation binaire sur $\mathbb{N}^*$ définie par :

$$\forall m,n\in\mathbb{N}^*,\ m\ \preceq\ n \Longleftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}^*,\ n=mk$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre [3].
2. Justifier que cet ordre n'est que partiel.
3. Dans cette question, on considère la partie $A=\{1,2,\ldots,9\}$.
   (a) Représenter le diagramme de Hasse pour A (de bas en haut).
   (b) La partie A admet-elle un minimum ?
   (c) La partie A admet-elle un maximum ?
   (d) La partie A admet-elle une borne supérieure ?
   (e) La partie A admet-elle des éléments maximaux ?

---
[1]. Il s'agit de la relation de commensurabilité : deux longueurs sont commensurables lorsqu'elles ont une « commune mesure »
[2]. Ce procédé permet de détecter une erreur, mais pas de valider un résultat
[3]. Il s'agit de la divisibilité que l'on note souvent : $m \mid n$

Exercice 5.

Soit E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application injective.
On considère la relation binaire sur E définie par :

$$\forall x, y \in E,\ x \preceq y \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.
2. S'agit-il d'une relation d'ordre totale ?

Exercice 6 (ordre produit)**.**

Soit $\left(E, \preceq_E\right)$ et $\left(F, \preceq_F\right)$ deux ensembles ordonnés.
On considère la relation binaire sur $E \times F$ définie par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in E \times F,\ (x, y) \preceq (x', y') \Longleftrightarrow x \preceq_E x' \text{ et } y \preceq_F y'$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre [4].
2. S'agit-il d'une relation d'ordre totale dès que $\preceq_E$ et $\preceq_F$ le sont ?

Exercice 7 (ordre lexicographique)**.**

On considère la relation binaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2,\ (x, y) \preceq (x', y') \Longleftrightarrow x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre [5].
2. S'agit-il d'une relation d'ordre totale ?

---

[4]. Il s'agit de la relation d'ordre produit que l'on peut généraliser à :
- $\mathbb{R}^n$ pour définir un ordre sur les n-uplets
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour définir un ordre sur les suites réelles
- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ pour définir un ordre sur les applications réelles à une variable réelle

[5]. Il s'agit de l'ordre lexicographique