BUT Informatique

Année universitaire 2022 / 2023

R3.08 – Probabilités

Responsable : A. Ridard

Autre intervenant : T. Godin

Vannes

Université Bretagne Sud

Université Bretagne Sud

Avant-propos

Ce document est spécifiquement rédigé pour des séances de Cours/TD.

Il présente les éléments de cours habituels (définitions et propriétés) enrichis de remarques, indiquées par , donnant un certain éclairage pour mieux les comprendre, les retenir et les utiliser.

Ce cours est aussi ponctué d'exercices, indiqués par , qui seront traités en classe ou à la maison pour bien assimiler les différentes notions présentées. Grâce à ces exercices, vous allez fabriquer les exemples du cours ainsi que certaines preuves. C'est effectivement en étant acteur dans ses apprentissages que l'on profite au mieux des enseignements !

Ce document sera complété par des feuilles de TD ou TP pour s'entraîner d'avantage.

Les situations étudiées dans ce document sont plutôt issues des "jeux de hasard" (pièce, dé, urne, cartes). Elles constituent des modèles auxquels on peut se ramener par un travail de modélisation : transformation d'un problème concret (de la vraie vie) en un problème mathématique "type" que l'on sait résoudre. Les exercices de TD ou TP, quant à eux, seront plutôt issus de l'Informatique.

Bonne lecture, et bon travail...

Table des matières

I. Probabilités

1. Un peu de vocabulaire pour commencer

Une **expérience** est dite **aléatoire** [1] lorsque son résultat n'est pas connu à l'avance.
On note alors Ω l'ensemble des résultats possibles appelé **univers**.

Dans ce cours, sauf mention contraire, Ω désignera un ensemble fini $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$.

La théorie des probabilités s'appuie sur la théorie des ensembles mais sa terminologie est spécifique :

- L'ensemble des parties de Ω est notée $\mathscr{P}(\Omega)$ et ses éléments sont appelés des **événements**.
  On dit alors que le couple $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est un **espace probabilisable**
- Si A est un événement, $\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A
- Ω est l'**événement certain** et $\varnothing$ l'**événement impossible**
- Deux **événements** A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$
- Un **système complet d'événements** est une partition de Ω c'est à dire une famille [2] $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements :
  - possibles : $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ A_i \neq \varnothing$
  - incompatibles deux à deux : $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$
  - décrivant tout l'univers : $\Omega = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

2. Notion de probabilité

Définition (Probabilité)**.**

Une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est une application $\mathrm{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :

- $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
- Si A et B sont des événements incompatibles, alors $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ (additivité)

On dit alors que le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ est un espace probabilisé.

Définition (Probabilité uniforme)**.**

On appelle probabilité uniforme l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{P} : & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathrm{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} \end{array}$$

Il existe d'autres probabilités

La probabilité uniforme est utilisée uniquement lorsque tous les résultats possibles sont équiprobables

Propriété (Propriétés élémentaires)**.**

- $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$
- Si A est un événement, alors $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$
- Pour tout événement A et B, on a :
  - $A \subset B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$
  - $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$
- Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements incompatibles deux à deux, alors $\mathrm{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$

[1]. En opposition avec déterministe
[2]. En fait, la notion de famille est plus générale car elle autorise une infinité dénombrable d'événements, mais cela sort du cadre de ce cours

II. Probabilités conditionnelles et indépendance

1. Notion de probabilité conditionnelle

Définition (Probabilité conditionnelle)**.**

Soit B un événement réalisable c'est à dire vérifiant $\mathrm{P}(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle sachant B l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{P}_B : & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} \end{array}$$

- P_B est une probabilité !
- Si $\mathrm{P}(B) = 0$, on convient de poser $\mathrm{P}(A|B) = 0$

Propriété (Formule des probabilités composées)**.**

Si A et B sont des événements, alors $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$.

Généralisation :
- Si A, B, C sont des événements, alors $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(C|A \cap B)$
- Si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements, alors $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)\mathrm{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\dots\mathrm{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges.
On tire successivement et sans remise n boules dans cette urne.
On note A_k l'événement « la boule obtenue lors du k-ième tirage est blanche ».

Déterminer la probabilité qu'une boule rouge figure dans ce tirage en mesurant l'événement contraire.
On pourra étudier les cas $n = 2$ et $n = 3$ avant de répondre dans le cas général.

Propriété (Formule des probabilités totales)**.**

Soit A un événement de sorte que la famille $\left(A, \overline{A}\right)$ soit un système complet d'événements [a].
Si B est un événement [b], alors $\mathrm{P}(B) = P(B|A)\mathrm{P}(A) + P(B|\overline{A})\mathrm{P}(\overline{A})$.

Généralisation :
- Soit (A_1, A_2, A_3) un système complet d'événements.
  Si B est un événement, alors $\mathrm{P}(B) = P(B|A_1)\mathrm{P}(A_1) + P(B|A_2)\mathrm{P}(A_2) + P(B|A_3)\mathrm{P}(A_3)$
- Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements.
  Si B est un événement, alors $\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B|A_i)\mathrm{P}(A_i)$

---
a. Si ce n'est pas le cas (A impossible ou certain), ce conditionnement n'aurait pas d'intérêt !
b. dont la réalisation "dépend" de celle de A

Problème de Monty Hall

Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur). Ce joueur est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture (ou tout autre prix magnifique) et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre (ou tout autre prix sans importance). Il doit tout d'abord désigner une porte. Puis le présentateur doit ouvrir une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début). Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte.

Que doit faire le candidat? Quelles sont ses chances de gagner la voiture en agissant au mieux?
Indice : on pourra considérer G l'événement « le joueur gagne la voiture » et B celui « le joueur avait choisi la bonne porte », puis calculer $\mathrm{P}(G)$ si le joueur change de porte, et sinon.

On dispose de six urnes numérotées de 1 à 6.
L'urne numéro k comporte k boules blanches et une boule rouge.
Un joueur lance un dé équilibré puis choisit une boule dans l'urne correspondant au résultat du dé.
On note A_k l'événement « le dé donne la valeur k » et B l'événement « la boule tirée est blanche ».

Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.

Propriété (Formule de Bayes)**.**

Soit A un événement de sorte que la famille $\left(A, \overline{A}\right)$ soit un système complet d'événements.
Si B est un événement réalisable, alors $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)}{P(B|A)\mathrm{P}(A) + P(B|\overline{A})\mathrm{P}(\overline{A})}$.

Généralisation :
Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements.
Si B est un événement réalisable, alors pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\mathrm{P}(A_k|B) = \dfrac{\mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B|A_i)\mathrm{P}(A_i)}$.

La formule de Bayes est utile pour les raisonnements « rétroactifs ». Si on sait mesurer la conséquence B d'un événement A et que l'on sait l'événement B réalisé, la formule de Bayes permet de savoir si l'événement A l'a été. On parle parfois de la formule de probabilité des causes.

Une urne contient deux dés : l'un est équilibré et l'autre donne systématiquement un 6.
On choisit un dé dans l'urne et on le lance.
On note A l'événement « le dé choisi est équilibré » et B l'événement « le dé lancé donne un 6 ».

En supposant que le dé lancé donne un 6, déterminer la probabilité que ce dé soit équilibré.

Problème de Monty Hall

On se propose ici de résoudre le problème de Monty Hall d'une autre manière.
On considère F_i l'événement « la voiture est derrière la porte i » et O_j celui « le présentateur ouvre la porte j ».
Pour fixer les idées, sans perdre de généralité [a], on peut supposer que le joueur ait choisi la porte 1, et le présentateur ouvert la porte 2.
Indice : Calculer $\mathrm{P}(F_1|O_2)$ et $\mathrm{P}(F_3|O_2)$, puis conclure [b].

a. Les calculs seraient les mêmes dans les autres cas
b. Le joueur peut évaluer les probabilités de F_1 et F_3 avec une information supplémentaire

2. Événements indépendants

Définition (Indépendance de deux événements)**.**

On dit que deux événements A et B sont indépendants si $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

- Soit B un événement réalisable. Alors,
  A et B sont indépendants si et seulement si $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$ autrement dit, savoir que B est réalisé n'apporte rien !
- Si A et B sont des événements indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi, tout comme $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

1. On lance deux fois un dé équilibré.
   Les événements A : « le premier lancer donne un six » et B : « le second lancer donne un six » sont-ils indépendants ?
2. On tire successivement sans remise deux boules dans une urne contenant 5 boules blanches et 2 boules rouges.
   Les événements A : « la première boule tirée est blanche » et B : « la seconde boule tirée est blanche » sont-ils indépendants ?
3. Même question avec un tirage successif avec remise.

En général, on ne vous demande pas de prouver l'indépendance, mais plutôt de l'utiliser (hypothèse naturelle ou de travail).

Ne pas confondre indépendance et incompatibilité

D'après le tableau suivant, dans quel(s) cas les événements A et B sont-ils indépendants ?

	$\mathrm{P}(A)$	$\mathrm{P}(B)$	$\mathrm{P}(A\cup B)$
cas 1	0.1	0.9	0.91
cas 2	0.4	0.6	0.76
cas 3	0.5	0.3	0.8

Définition (Indépendance mutuelle d'événements)**.**

On dit que les événements $A_1,\dots,A_n$ sont mutuellement indépendants si pour tout J finie [a] $\subset\{1,\dots,n\}$, on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)=\prod_{j\in J}\mathrm{P}(A_j)$$

a. Inutile ici, mais permet de généraliser la définition à une infinité dénombrable d'événements

Ne pas confondre indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

On lance deux dés discernables et l'on considère les événements :

- A « le premier dé lancé donne un résultat pair »
- B « le second dé lancé donne un résultat pair »
- C « la somme des deux dés est paire »

Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

III. Variables aléatoires finies

1. Loi de probabilité

Définition (Variable aléatoire)**.**

Une variable aléatoire (v.a.) est une application mesurable [a] $X:\Omega \to X(\Omega)$
où $X(\Omega)=\{x_0,x_1,\dots,x_N\}$ désigne l'ensemble des valeurs prises par X.

[a]. Cette notion de la théorie de la mesure ne sera évidemment pas détaillée ici. En gros, elle assure de pouvoir mesurer la probabilité de tout événement sur $X(\Omega)$ à l'aide de la probabilité P définie sur Ω

- L'appellation variable aléatoire est usuelle bien que malheureuse. En effet, X n'est pas une variable, mais bien une fonction et celle-ci n'est pas aléatoire, mais plutôt déterministe. Ce sont les valeurs prises par X qui correspondent à des quantités qui vont varier selon le résultat de l'expérience aléatoire.
- Il est tout à fait possible d'utiliser une v.a. $X:\Omega \to X(\Omega)$ sans préciser l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathrm{P})$.
  C'est même ce qui fait la force de cet objet en le rendant très pratique !

Somme de deux dés équilibrés

On note X la v.a. représentant la somme de deux dés équilibrés.

Compléter la définition suivante :

$$X: \begin{array}{ccc} \dots & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longmapsto & \dots \end{array}$$

Définition (Loi de probabilité)**.**

On appelle loi d'une v.a. $X:\Omega \to X(\Omega)$, l'application :

$$\mathrm{P}_X: \begin{array}{ccl} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathrm{P}_X(A)=\mathrm{P}\big(X^{-1}(A)\big)=\mathrm{P}\big(\{\omega\in\Omega | X(\omega)\in A\}\big)=\mathrm{P}(X\in A) \end{array}$$

- P_X est une probabilité !
- L'existence de $\mathrm{P}\big(X^{-1}(A)\big)$ est assurée par la mesurabilité de X
- La dernière égalité fournit une notation très pratique

Somme de deux dés équilibrés - suite

Calculer la probabilité que la somme soit inférieure ou égale à 3 c'est à dire $\mathrm{P}_X\big(\{2,3\}\big)=\mathrm{P}\big(X\in\{2,3\}\big)=\mathrm{P}(X\le 3)$.

Propriété (Détermination d'une loi de probabilité)**.**

La loi d'une v.a. $X:\Omega\to X(\Omega)$ est entièrement déterminée par :
- les valeurs possibles : $X(\Omega)=\{x_0,x_1,\dots,x_N\}$
- pour chacune des valeurs possibles, la probabilité associée : $\forall i\in\{0,\dots,N\},\ p_i=\mathrm{P}(X=x_i)$

Une telle loi est souvent présentée à l'aide d'un tableau :

Valeurs possibles x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_N
Probabilités associées p_i	p_0	p_1	$\dots$	p_N

Bien entendu, on a : $\sum_{i=0}^{N} p_i = 1$.

Elle est représentée graphiquement par un diagramme en bâtons

Somme de deux dés équilibrés - suite

1. Déterminer la loi de X à l'aide d'un tableau.
2. Représenter graphiquement cette loi.
3. Calculer $\mathrm{P}(X \leq 3)$.

2. Fonction de répartition

Définition (Fonction de répartition)**.**

La fonction de répartition d'une v.a. $X : \Omega \to X(\Omega)$ est définie par :

$$F : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathrm{P}(X \leq x) = \sum\limits_{i \mid x_i \leq x} p_i \end{array}$$

- Elle est représentée graphiquement par une fonction en escalier où la marche x_i est de hauteur p_i
- Elle est croissante, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$
- Elle est continue à droite
- Cette notion est fondamentale pour simuler des lois à l'aide d'un ordinateur

Somme de deux dés équilibrés - suite

1. Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
2. Retrouver, graphiquement, $\mathrm{P}(X \leq 3)$.

Propriété (Caractérisation d'une loi de probabilité)**.**

La loi d'une v.a. est caractérisée par sa fonction de répartition :
- Les valeurs possibles x_i sont les points de discontinuité (à gauche) de F
- Les probabilités associées p_i sont déterminées par :

$$p_i = \mathrm{P}(X = x_i) = \mathrm{P}(X \leq x_i) - \mathrm{P}(X \leq x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1}) \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, N\} \quad \text{et } p_0 = F(x_0)$$

Somme de deux dés équilibrés - suite

A partir du graphique précédent, retrouver la loi de X.

3. Espérance

Définition (Espérance)**.**

On appelle espérance de X le réel défini par $E(X) = \sum_{i=0}^{N} x_i p_i$.

- C'est la moyenne des valeurs possibles pondérées par les probabilités associées
- Les différentes valeurs possibles se répartissent autour de $E(X)$ qui est un indicateur de tendance centrale
- Lorsque $E(X) = 0$, on dit que X est centrée
- Si X est constante égale à c, alors $E(X) = c$

Somme de deux dés équilibrés - suite

Déterminer l'espérance de X.

Propriété (Linéarité)**.**

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.
En particulier, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $E(aX + b) = aE(X) + b$.

- L'espérance d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des espérances
- La v.a. $X - E(X)$ est centrée

Somme de deux dés équilibrés - suite

On considère que la somme obtenue X permet, à chaque élève d'une classe de CE1 lançant les deux dés, de gagner Y Smarties, égal au double de la somme augmenté de un (petit jeu de fin d'année organisé par une maîtresse pour faire calculer mentalement ses élèves).

Déterminer le gain moyen qui permettra à cette maîtresse d'une classe de 30 élèves de prévoir [a] le bon nombre de Smarties.

a. cette prévision repose sur la loi forte des grands nombres qui sera vue dans un prochain module

Propriété (Théorème du transfert)**.**

Soit g une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$.

L'espérance de la v.a. $g(X)$ est alors $E\left(g(X)\right) = \sum_{i=0}^{N} g(x_i) p_i$.

Somme de deux dés équilibrés - suite

Déterminer l'espérance de X^2.

4. Variance et écart-type

Définition (Variance et écart-type)**.**

On appelle variance de X le réel (positif) défini par $V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \sum_{i=0}^{N} \left(x_i - E(X)\right)^2 p_i$.

On définit aussi son écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

- La variance et l'écart-type permettent de mesurer la dispersion de X autour de sa moyenne
- Si X se comprend avec une unité, l'espérance et l'écart-type s'expriment avec la même unité
- Lorsque $V(X) = 1$, on dit que X est réduite
- Si X est constante égale à c, alors $V(X) = 0$
- Pour calculer une variance, on préférera la formule suivante

Pourquoi choisir de mesurer la dispersion de X autour de sa moyenne à l'aide de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne (variance), plutôt qu'à l'aide de la moyenne des écarts à la moyenne ?

Propriété (Formule de Huygens)**.**

$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$

Démontrer cette formule.

Somme de deux dés équilibrés - suite

Déterminer, à l'aide de cette formule, la variance de X.

Propriété (Changement affine)**.**

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$

La v.a. $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite

Somme de deux dés équilibrés - suite et fin

Déterminer l'écart-type de $Y = 2X + 1$.

5. Lois usuelles

a. Loi uniforme

Définition (Loi uniforme)**.**

On dit que X suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$, et l'on note $X \sim \mathscr{U}_{\{1,\dots,n\}}$ si :

- $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$
- $\forall k \in \{1, \dots, n\},\ \mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{n}$

La loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ modélise une situation d'équiprobabilité.

Propriété (Espérance et variance)**.**

Si $X \sim \mathscr{U}_{\{1,\dots,n\}}$, alors :

- $E(X) = \frac{n+1}{2}$
- $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

1. Démontrer la formule de l'espérance.
2. En admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, démontrer la formule de la variance.

On lance un dé équilibré et on considère X la v.a. égale au résultat obtenu.

1. Reconnaître la loi de X.
2. Représenter graphiquement la loi et la fonction de répartition de X.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.

b. Loi de Bernoulli

Définition (Loi de Bernoulli)**.**

On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, et l'on note $X \sim \mathscr{B}(p)$ si :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$
- $\mathrm{P}(X = 1) = p$ et $\mathrm{P}(X = 0) = 1 - p = q$

La loi de Bernoulli de paramètre p modélise une expérience aléatoire à deux issues possibles (succès noté 1 et échec noté 0) de probabilité de succès p.

Propriété (Espérance et variance)**.**

Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors :

- $E(X) = p$
- $V(X) = p(1 - p)$

Démontrer ces deux formules.

On lance une pièce équilibrée et on considère X la v.a. égale à 1 si on obtient pile et 0 sinon.

1. Reconnaître la loi de X.
2. Représenter graphiquement la loi et la fonction de répartition de X.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.

c. Loi binomiale

Définition (Loi binomiale)**.**

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p, et l'on note $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ si :

- $X(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$
- $\forall k \in \{0, \ldots, n\},\ \mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

La loi binomiale de paramètres n et p modélise le nombre de succès à l'issue de n répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire à deux issues possibles de probabilité de succès p.

Propriété (Espérance et variance)**.**

Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, alors :

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$

On lance 10 fois une pièce équilibrée et on considère X la v.a. égale au nombre de piles obtenus.

1. Reconnaître la loi de X.
2. Représenter graphiquement la loi et la fonction de répartition de X.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins 2 piles.

6. Variables aléatoires indépendantes

Définition (v.a. indépendantes)**.**

Les v.a. X et Y sont indépendantes si pour tout $(i, j) \in \{0, \ldots, N_X\} \times \{0, \ldots, N_Y\}$, on a :

$$\mathrm{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \mathrm{P}(X = x_i)\mathrm{P}(Y = y_j)$$

- En s'inspirant de l'indépendance mutuelle d'une famille d'événements, on définit l'indépendance mutuelle d'une famille[a] de v.a. : elle exprime alors le fait que la probabilité de n'importe quelle intersection construite à partir des v.a. coïncide avec le produit des probabilités
- Comme pour les événements, des v.a. deux à deux indépendantes ne sont pas, en général, mutuellement indépendantes

a. Cette notion sera surtout utilisée avec des suites de v.a.

Propriété (Variance d'une somme)**.**

Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$.

Généralisation :

Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes deux à deux, alors $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

Faux en général

En fait, $V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$ où $Cov(X,Y) = E\Big(\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\Big)$ désigne la covariance[a] de X et Y

a. cette notion sera vue dans un prochain module

On considère $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi, la loi $\mathscr{B}(p)$.
On note $X = X_1+\cdots+X_n$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de X.
2. Reconnaître la loi de X.
3. Quel résultat du cours vient-on de démontrer ?

IV. Variables aléatoires infinies

Pour traiter le cas où $X(\Omega)$ n'est pas fini, on doit d'abord généraliser la définition même d'une probabilité en remplaçant la propriété d'additivité par celle de σ-additivité :

$$\text{Pour toute suite } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ d'événements incompatibles deux à deux, } \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

Cette propriété exprime encore qu'avec des événements incompatibles, la probabilité de la réunion est égale à la somme des probabilités. Mais cette fois, la somme possède une infinité de termes...

1. Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

On notera déjà que lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, on dit que X est discrète ce qui suggère que le cas dénombrable doit ressembler au cas fini.

En fait, il suffit de remplacer les sommes $\sum_{i=0}^{N}$ par des sommes $\sum_{i=0}^{+\infty}$ définies par $\lim_{N\to+\infty}\sum_{i=0}^{N}$. Plus précisément, on a besoin de la théorie des séries numériques qui sort du cadre de ce cours. On se permettra néanmoins d'utiliser les lois usuelles suivantes.

a. Loi géométrique

Définition (Loi géométrique)**.**

On dit que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, et l'on note $X \sim \mathscr{G}(p)$ si :
- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$

La loi géométrique de paramètres p modélise le nombre de répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire à deux issues possibles, de probabilité de succès p, jusqu'à l'obtention du premier succès

1. Montrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} \mathrm{P}(X = k) = 1$ c'est à dire $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) = 1$.
2. Déterminer F_X. ***Ce résultat pourra maintenant être utilisé directement***

Propriété (Espérance et variance)**.**

Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors :
- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Propriété (Absence de mémoire)**.**

Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors : $\forall m, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X > m + n | X > m) = \mathrm{P}(X > n)$

Démontrer cette propriété.

On lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile et on considère X la v.a. égale au nombre de lancers.
1. Reconnaître la loi de X, puis déterminer son espérance et sa variance.
2. Sachant que les 5 premiers lancers sont des faces, déterminer la probabilité des événements suivants :
   (a) Le temps d'attente du premier pile est strictement supérieur à 10
   (b) Le temps d'attente du premier pile est inférieur ou égal à 10

b. Loi de Poisson

Définition (Loi de Poisson)**.**

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et l'on note $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ si :
- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Approximation d'une loi de Poisson par une loi binomiale

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. avec $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$.
Si $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$, alors $\mathrm{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Une loi de Poisson de paramètre λ modélise ainsi le nombre d'occurrences, durant un laps de temps T, d'un phénomène "rare" qui se produit en moyenne λ fois pendant ce laps de temps T. On peut, par exemple, discrétiser 1 h en 3600 s.

Propriété (Espérance et variance)**.**

Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors :

- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$

L'accueil de l'IUT reçoit en moyenne 3 appels par heure.
On considère X la v.a. égale au nombre d'appels reçus pendant une heure.

1. Reconnaître la loi de X, puis déterminer son espérance et sa variance.
2. Déterminer la probabilité qu'aucun appel ne soit reçu pendant l'heure.

2. Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Le monde du continu étant différent du monde discret, on se doute bien que la généralisation sera plus importante que la précédente. Ceci étant, le cas continu n'est pas fondamentalement différent du cas discret car ce sont deux variantes d'une seule et même théorie, celle de la mesure qui sort évidemment du cadre de ce cours.

En fait, il suffit de "remplacer" les sommes discrètes $\sum$ par des sommes continues ou encore intégrales $\int$. Plus précisément, on a besoin de la théorie des intégrales généralisées qui sort, encore une fois, du cadre de ce cours. On se permettra néanmoins de donner quelques résultats et d'utiliser certaines lois usuelles.

a. Loi de probabilité et fonction de répartition

Propriété (Détermination d'une loi de probabilité)**.**

La loi d'une v.a. (absolument) continue $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est entièrement déterminée par sa fonction de densité :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}$$

vérifiant $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

On a alors : $\forall [a,b] \subset \mathbb{R},\ \mathrm{P}(X \in [a,b]) = \mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$

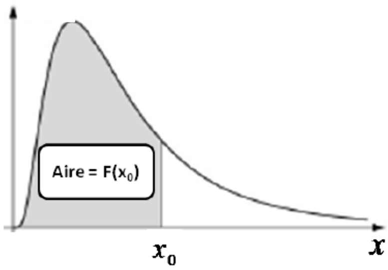
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(X = x) = 0$, on pourra donc toujours travailler avec des inégalités larges
- Pour modéliser « le poids de x », on considère $\mathrm{P}(x-\epsilon \leq X \leq x+\epsilon)$ avec ϵ très petit ce qui autorise f à dépasser 1

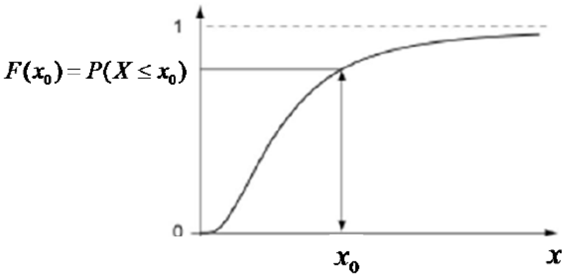
Définition (Fonction de répartition)**.**

La fonction de répartition d'une v.a. (absolument) continue $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathrm{P}(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \end{array}$$

- Elle est croissante, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$
- Elle est continue
- En dérivant F, éventuellement par morceaux, on retrouve f





b. Espérance et variance

Définition (Espérance)**.**

On appelle espérance de X le réel défini par $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$.

Définition (Variance)**.**

On appelle variance de X le réel (positif) défini par $V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - E(X)\right)^2 f(t)\, dt$.

Toutes les propriétés restent vraies dans le cas continu

c. Loi uniforme

Définition (Loi uniforme)**.**

On dit que X suit une loi uniforme sur $[a,b]$, et l'on note $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$ si sa fonction de densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est la version continue de la loi uniforme finie, elle traduit une situation d'équiprobabilité

Propriété (Fonction de répartition)**.**

Si $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$, alors sa fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

1. Démontrer cette propriété.
2. Représenter graphiquement la densité et la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$, incontournable en simulation.

Propriété (Espérance et variance)**.**

Si $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$, alors :
- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Démontrer ces deux formules.

d. Loi exponentielle

Définition (Loi exponentielle)**.**

On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et l'on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si sa fonction de densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

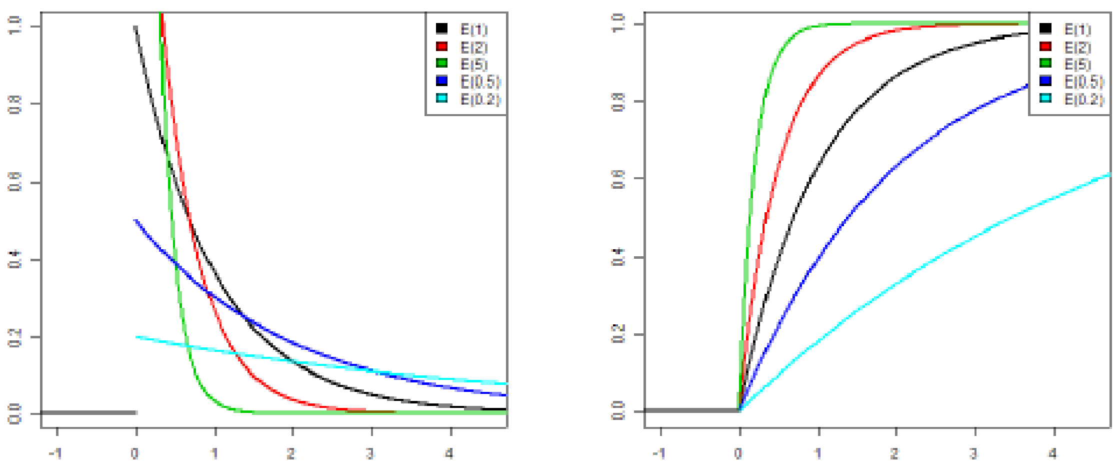
C'est la version continue de la loi géométrique, elle exprime un temps d'attente ou une durée de vie

Propriété (Fonction de répartition)**.**

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors sa fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démontrer cette propriété.



Propriété (Espérance et variance).

Si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, alors :
- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Le paramètre λ représente l'inverse du temps d'attente moyen

Propriété (Absence de mémoire).

Si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, alors : $\forall x, t \in [0, +\infty[$, $\mathrm{P}(X > x + t | X > x) = \mathrm{P}(X > t)$

Des recherches épidémiologiques montrent que le temps qui s'écoule entre l'apparition de 2 cas d'une maladie rare suit une loi exponentielle. Il s'écoule en moyenne 120 jours entre 2 apparitions de cas de cette maladie.
On considère X la v.a. égale au temps d'attente avant le prochain cas.

1. Reconnaître la loi de X.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la probabilité que le temps d'attente avant le prochain cas soit de moins de 100 jours.
4. Déterminer la probabilité que le temps d'attente avant le prochain cas soit de plus d'un an, sachant que cela fait déjà 265 jours qu'aucun cas n'a été signalé.

e. Loi normale

Définition (Loi normale).

On dit que X suit une loi normale (ou gaussienne) de paramètres m et σ, et l'on note $X \sim \mathscr{N}(m, \sigma)$ si sa fonction de densité f est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

Elle permet de modéliser de nombreux phénomènes et est fondamentale en Statistique inférentielle

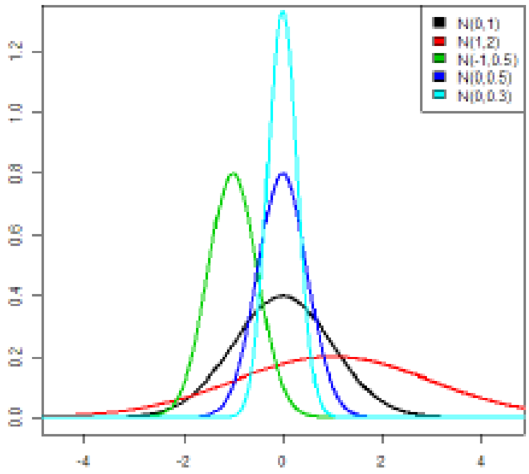
Propriété (Fonction de répartition).

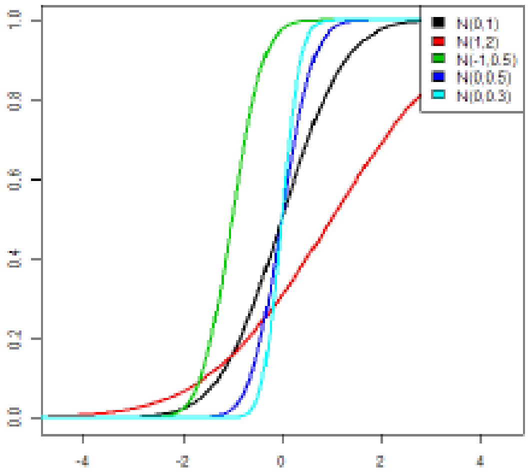
Si $X \sim \mathscr{N}(m, \sigma)$, alors sa fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} \, dt$$

Cette intégrale ne peut pas se calculer de manière exacte

Néanmoins, il existe une table de valeurs dans le cas $m = 0$ et $\sigma = 1$ qui jouera un rôle important.





Propriété (Espérance et variance)**.**

Si $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$, alors :

- $E(X) = m$
- $V(X) = \sigma^2$

Le deuxième paramètre σ représente l'écart-type

Certains auteurs utilisent σ^2 comme deuxième paramètre (pas de convention universelle)

Propriété (Réduction et centrage)**.**

Si $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$, alors $X^* = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

- La loi $\mathcal{N}(0,1)$ est appelée loi normale centrée réduite
- La v.a. X^* est appelée la centrée réduite de X
- Ce résultat utilise le fait qu'une transformée affine d'une gaussienne est encore gaussienne
- Ce changement de variable est indispensable, à moins de disposer d'un ordinateur, dans les calculs de probabilités avec une gaussienne car il permet de se ramener à la table de la gaussienne centrée réduite

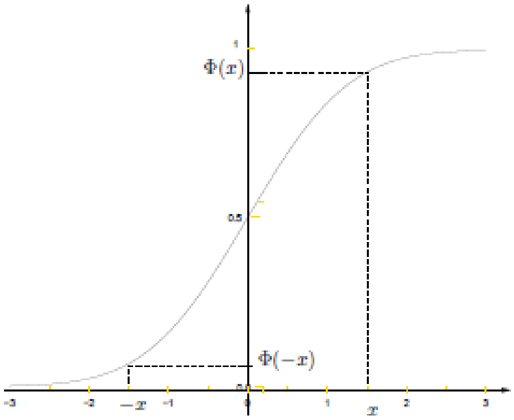
Propriété (Fonction de répartition ϕ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$)**.**

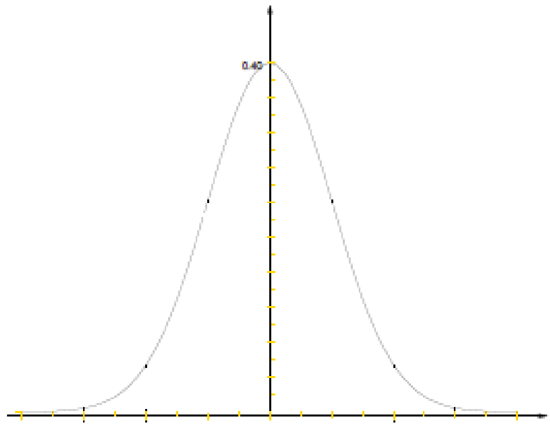
Soit $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ et ϕ sa fonction de répartition.
Pour tout $x \geq 0$, on a :

- $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$
- $\mathrm{P}\big(|U| \leq x\big) = \mathrm{P}(-x \leq U \leq x) = \mathrm{P}(U \leq x) - \mathrm{P}(U \leq -x) = 2\phi(x) - 1$

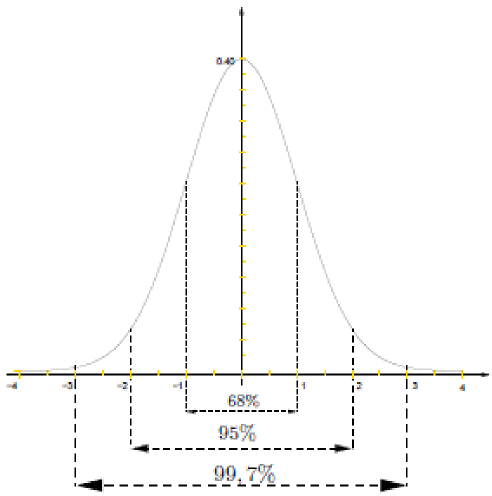
- Sauf mention contraire, U désignera une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$
- On notera ϕ, plutôt que F, la fonction de répartition de U
- Le premier point justifie que la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ ne porte que sur les positifs
- Cette table est disponible en Annexe

1. Le premier point $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$ est illustré par le graphique de gauche (fonction de répartition). Illustrer-le sur le graphique de droite (densité).





2. Utiliser le deuxième point $\mathrm{P}\big(|U| \leq x\big) = 2\phi(x) - 1$ et la table pour justifier les pourcentages suivants :



On considère la v.a. X égale à la note d'un candidat ayant passé un examen.
On suppose que $X \sim \mathcal{N}(7,2)$.

1. Déterminer la proportion de candidats ayant obtenu au moins 10/20.
2. Déterminer le premier décile c'est à dire la note en dessous de laquelle se situent 10% des candidats.
3. Le but de cette question est de réajuster à l'aide d'une transformation affine $Y = aX + b$ (a et b étant des réels positifs) les notes de la promotion de sorte que :
   - 50% des candidats aient obtenu au moins 10/20
   - le premier décile soit égal à 7

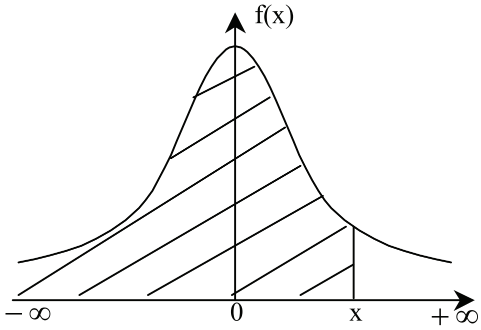
   (a) Déterminer [a] la loi de Y en fonction de a et b.

   (b) Déterminer un système de deux équations en a et b issu des deux conditions et conclure.

a. On admettra qu'une transformée affine de gaussienne est encore une gaussienne

Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921