

## R3.08 - Probabilités Cours 2 - Variables aléatoires finies

A. Ridard

## A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - l'icône en dessous du logo IUT
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante :  
[anthony.ridard@univ-ubs.fr](mailto:anthony.ridard@univ-ubs.fr)

# Plan du cours

- 1 Loi de probabilité
- 2 Fonction de répartition
- 3 Espérance
- 4 Variance et écart-type
- 5 Lois usuelles
  - Loi uniforme
  - Loi de Bernoulli
  - Loi binomiale
- 6 Variables aléatoires indépendantes

- 1 Loi de probabilité
- 2 Fonction de répartition
- 3 Espérance
- 4 Variance et écart-type
- 5 Lois usuelles
- 6 Variables aléatoires indépendantes

## Définition (Variable aléatoire)

Une variable aléatoire (v.a.) est une application mesurable<sup>a</sup>  $X : \Omega \rightarrow X(\Omega)$  où  $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  désigne l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .

a. Cette notion de la théorie de la mesure ne sera évidemment pas détaillée ici. En gros, elle assure de pouvoir mesurer la probabilité de tout événement sur  $X(\Omega)$  à l'aide de la probabilité  $P$  définie sur  $\Omega$



- L'appellation variable aléatoire est usuelle bien que malheureuse. En effet,  $X$  n'est pas une variable, mais bien une fonction et celle-ci n'est pas aléatoire, mais plutôt déterministe. Ce sont les valeurs prises par  $X$  qui correspondent à des quantités qui vont varier selon le résultat de l'expérience aléatoire.
- Il est tout à fait possible d'utiliser une v.a.  $X : \Omega \rightarrow X(\Omega)$  sans préciser l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ . C'est même ce qui fait la force de cet objet en le rendant très pratique !



## Somme de deux dés équilibrés

On note  $X$  la v.a. représentant la somme de deux dés équilibrés.

Compléter la définition suivante :

$$X: \begin{array}{ccc} \dots & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longmapsto & \dots \end{array}$$

## Définition (Loi de probabilité)

On appelle loi d'une v.a.  $X : \Omega \rightarrow X(\Omega)$ , l'application :

$$\begin{aligned} P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}) = P(X \in A) \end{aligned}$$



- $P_X$  est une probabilité !
- L'existence de  $P(X^{-1}(A))$  est assurée par la mesurabilité de  $X$
- La dernière égalité fournit une notation très pratique



## Somme de deux dés équilibrés - suite

Calculer la probabilité que la somme soit inférieure ou égale à 3 c'est à dire  $P_X(\{2,3\}) = P(X \in \{2,3\}) = P(X \leq 3)$ .

## Détermination d'une loi de probabilité

La loi d'une v.a.  $X : \Omega \rightarrow X(\Omega)$  est entièrement déterminée par :

- les valeurs possibles :  $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$
- pour chacune des valeurs possibles, la probabilité associée :  
 $\forall i \in \{0, \dots, N\}, p_i = P(X = x_i)$

Une telle loi est souvent présentée à l'aide d'un tableau :

Valeurs possibles $x_j$	$x_0$	$x_1$	...	$x_N$
Probabilités associées $p_j$	$p_0$	$p_1$	...	$p_N$

Bien entendu, on a :  $\sum_{i=0}^N p_i = 1$ .



Elle est représentée graphiquement par un diagramme en bâtons





## Somme de deux dés équilibrés - suite

- 1 Déterminer la loi de  $X$  à l'aide d'un tableau.
- 2 Représenter graphiquement cette loi.
- 3 Calculer  $P(X \leq 3)$ .

- 1 Loi de probabilité
- 2 Fonction de répartition**
- 3 Espérance
- 4 Variance et écart-type
- 5 Lois usuelles
- 6 Variables aléatoires indépendantes

## Définition (Fonction de répartition)

La fonction de répartition d'une v.a.  $X : \Omega \rightarrow X(\Omega)$  est définie par :

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto P(X \leq x) = \sum_{i|x_i \leq x} p_i \end{aligned}$$



- Elle est représentée graphiquement par une fonction en escalier où la marche  $x_i$  est de hauteur  $p_i$
- Elle est croissante, tend vers 0 en  $-\infty$  et vers 1 en  $+\infty$
- Elle est continue à droite
- Cette notion est fondamentale pour simuler des lois à l'aide d'un ordinateur



## Somme de deux dés équilibrés - suite

- 1 Représenter graphiquement la fonction de répartition de  $X$ .
- 2 Retrouver, graphiquement,  $P(X \leq 3)$ .

## Caractérisation d'une loi de probabilité

La loi d'une v.a. est caractérisée par sa fonction de répartition :

- Les valeurs possibles  $x_i$  sont les points de discontinuité (à gauche) de  $F$
- Les probabilités associées  $p_i$  sont déterminées par :

$$p_i = P(X = x_i) = P(X \leq x_i) - P(X \leq x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

pour  $i \in \{1, \dots, N\}$  et  $p_0 = F(x_0)$ .



### Somme de deux dés équilibrés - suite

- I A partir du graphique précédent, retrouver la loi de  $X$ .

- 1 Loi de probabilité
- 2 Fonction de répartition
- 3 Espérance**
- 4 Variance et écart-type
- 5 Lois usuelles
- 6 Variables aléatoires indépendantes

## Définition (Espérance)

On appelle espérance de  $X$  le réel défini par  $E(X) = \sum_{i=0}^N x_i p_i$ .



- C'est la moyenne des valeurs possibles pondérées par les probabilités associées
- Les différentes valeurs possibles se répartissent autour de  $E(X)$  qui est un indicateur de tendance centrale
- Lorsque  $E(X) = 0$ , on dit que  $X$  est centrée
- Si  $X$  est constante égale à  $c$ , alors  $E(X) = c$



## Somme de deux dés équilibrés - suite

I Déterminer l'espérance de  $X$ .

## Linéarité

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$ .

En particulier, pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $E(aX + b) = aE(X) + b$ .



- L'espérance d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des espérances
- La v.a.  $X - E(X)$  est centrée



## Somme de deux dés équilibrés - suite

On considère que la somme obtenue  $X$  permet, à chaque élève d'une classe de CE1 lançant les deux dés, de gagner  $Y$  Smarties, égal au double de la somme augmenté de un (petit jeu de fin d'année organisé par une maîtresse pour faire calculer mentalement ses élèves).

Déterminer le gain moyen qui permettra à cette maîtresse d'une classe de 30 élèves de prévoir<sup>a</sup> le bon nombre de Smarties.

---

a. cette prévision repose sur la loi forte des grands nombres qui sera vue dans un prochain module

### Théorème du transfert

Soit  $g$  une fonction réelle définie sur  $X(\Omega)$ .

L'espérance de la v. a.  $g(X)$  est alors  $E(g(X)) = \sum_{i=0}^N g(x_i)p_i$ .



### Somme de deux dés équilibrés - suite

I Déterminer l'espérance de  $X^2$ .



- 1 Loi de probabilité
- 2 Fonction de répartition
- 3 Espérance
- 4 Variance et écart-type**
- 5 Lois usuelles
- 6 Variables aléatoires indépendantes

## Définition (Variance et écart-type)

On appelle variance de  $X$  le réel (positif) défini par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{i=0}^N (x_i - E(X))^2 p_i.$$

On définit aussi son écart-type :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .



- La variance et l'écart-type permettent de mesurer la dispersion de  $X$  autour de sa moyenne
- Si  $X$  se comprend avec une unité, l'espérance et l'écart-type s'expriment avec la même unité
- Lorsque  $V(X) = 1$ , on dit que  $X$  est réduite
- Si  $X$  est constante égale à  $c$ , alors  $V(X) = 0$
- Pour calculer une variance, on préférera la formule suivante



Pourquoi choisir de mesurer la dispersion de  $X$  autour de sa moyenne à l'aide de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne (variance), plutôt qu'à l'aide de la moyenne des écarts à la moyenne?

### Formule de Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$



I Démontrer cette formule.



### Somme de deux dés équilibrés - suite

I Déterminer, à l'aide de cette formule, la variance de  $X$ .

## Changement affine

Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $V(aX + b) = a^2 V(X)$



| La v.a.  $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est centrée réduite



## Somme de deux dés équilibrés - suite et fin

| Déterminer l'écart-type de  $Y = 2X + 1$ .

- 1 Loi de probabilité
- 2 Fonction de répartition
- 3 Espérance
- 4 Variance et écart-type
- 5 Lois usuelles**
- 6 Variables aléatoires indépendantes

- 1 Loi de probabilité
- 2 Fonction de répartition
- 3 Espérance
- 4 Variance et écart-type
- 5 Lois usuelles**
  - **Loi uniforme**
  - Loi de Bernoulli
  - Loi binomiale
- 6 Variables aléatoires indépendantes

## Définition (Loi uniforme)

On dit que  $X$  suit une loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$ , et l'on note  $X \sim \mathcal{U}_{\{1, \dots, n\}}$  si :

- $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$
- $\forall k \in \{1, \dots, n\}, P(X = k) = \frac{1}{n}$



La loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$  modélise une situation d'équiprobabilité.



## Espérance et variance

Si  $X \sim \mathcal{U}_{\{1, \dots, n\}}$ , alors :

- $E(X) = \frac{n+1}{2}$
- $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$



- 1 Démontrer la formule de l'espérance.
- 2 En admettant que  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , démontrer la formule de la variance.



On lance un dé équilibré et on considère  $X$  la v.a. égale au résultat obtenu.

- 1 Reconnaître la loi de  $X$ .
- 2 Représenter graphiquement la loi et la fonction de répartition de  $X$ .
- 3 Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .

- 1 Loi de probabilité
- 2 Fonction de répartition
- 3 Espérance
- 4 Variance et écart-type
- 5 Lois usuelles**
  - Loi uniforme
  - Loi de Bernoulli**
  - Loi binomiale
- 6 Variables aléatoires indépendantes

### Définition (Loi de Bernoulli)

On dit que  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , et l'on note  $X \sim \mathcal{B}(p)$  si :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$
- $P(X = 1) = p$  et  $P(X = 0) = 1 - p = q$



La loi de Bernoulli de paramètre  $p$  modélise une expérience aléatoire à deux issues possibles (succès noté 1 et échec noté 0) de probabilité de succès  $p$ .

## Espérance et variance

Si  $X \sim \mathcal{B}(p)$ , alors :

- $E(X) = p$
- $V(X) = p(1 - p)$



I Démontrer ces deux formules.



On lance une pièce équilibrée et on considère  $X$  la v.a. égale à 1 si on obtient pile et 0 sinon.

- 1 Reconnaître la loi de  $X$ .
- 2 Représenter graphiquement la loi et la fonction de répartition de  $X$ .
- 3 Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .

- 1 Loi de probabilité
- 2 Fonction de répartition
- 3 Espérance
- 4 Variance et écart-type
- 5 Lois usuelles**
  - Loi uniforme
  - Loi de Bernoulli
  - Loi binomiale**
- 6 Variables aléatoires indépendantes

## Définition (Loi binomiale)

On dit que  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , et l'on note  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  si :

- $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$
- $\forall k \in \{0, \dots, n\}, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$



La loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  modélise le nombre de succès à l'issue de  $n$  répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire à deux issues possibles de probabilité de succès  $p$ .

## Espérance et variance

Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , alors :

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1 - p)$



On lance 10 fois une pièce équilibrée et on considère  $X$  la v.a. égale au nombre de piles obtenus.

- 1 Reconnaître la loi de  $X$ .
- 2 Représenter graphiquement la loi et la fonction de répartition de  $X$ .
- 3 Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .
- 4 Déterminer la probabilité d'obtenir au moins 2 piles.

- 1 Loi de probabilité
- 2 Fonction de répartition
- 3 Espérance
- 4 Variance et écart-type
- 5 Lois usuelles
- 6 Variables aléatoires indépendantes**



## Définition (v.a. indépendantes)

Les v.a.  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si pour tout  $(i, j) \in \{0, \dots, N_X\} \times \{0, \dots, N_Y\}$ , on a :

$$P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$



- En s'inspirant de l'indépendance mutuelle d'une famille d'événements, on définit l'indépendance mutuelle d'une famille<sup>a</sup> de v.a. : elle exprime alors le fait que la probabilité de n'importe quelle intersection construite à partir des v.a. coïncide avec le produit des probabilités
- Comme pour les événements, des v.a. deux à deux indépendantes ne sont pas, en général, mutuellement indépendantes

---

a. Cette notion sera surtout utilisée avec des suites de v.a.

## Variance d'une somme

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

**Généralisation :**

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes deux à deux, alors  $V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$



## Faux en général

En fait,  $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$

où  $Cov(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$  désigne la covariance<sup>a</sup> de  $X$  et  $Y$ .

---

a. cette notion sera vue dans un prochain module



On considère  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes et de même loi, la loi  $\mathcal{B}(p)$ .

On note  $X = X_1 + \dots + X_n$ .

- 1 Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .
- 2 Reconnaître la loi de  $X$ .
- 3 Quel résultat du cours vient-on de démontrer ?