

Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

R3.08 - Probabilités

Cours 3 - Variables aléatoires infinies

A. Ridard

A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
 - le menu (en haut à gauche)
 - l'icône en dessous du logo IUT
 - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

Plan du cours

- 1 Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
 - Loi géométrique
 - Loi de Poisson

- 2 Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$
 - Loi de probabilité et fonction de répartition
 - Espérance et variance
 - Loi uniforme
 - Loi exponentielle
 - Loi normale

Pour traiter le cas où $X(\Omega)$ n'est pas fini, on doit d'abord généraliser la définition même d'une probabilité en remplaçant la propriété d'additivité par celle de σ -additivité :

Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements incompatibles deux à deux,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Cette propriété exprime encore qu'avec des événements incompatibles, la probabilité de la réunion est égale à la somme des probabilités. Mais cette fois, la somme possède une infinité de termes...

Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi géométrique
Loi de Poisson

- 1 Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
- 2 Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

On notera déjà que lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, on dit que X est discrète ce qui suggère que le cas dénombrable doit ressembler au cas fini.

En fait, il suffit de remplacer les sommes $\sum_{i=0}^N$ par des sommes $\sum_{i=0}^{+\infty}$ définies par

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^N$. Plus précisément, on a besoin de la théorie des séries numériques qui sort du cadre de ce cours. On se permettra néanmoins d'utiliser les lois usuelles suivantes.

1 Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

- Loi géométrique
- Loi de Poisson

2 Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

- Loi de probabilité et fonction de répartition
- Espérance et variance
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale

Définition (Loi géométrique)

On dit que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, et l'on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$



La loi géométrique de paramètres p modélise le nombre de répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire à deux issues possibles, de probabilité de succès p , jusqu'à l'obtention du premier succès



- 1 Montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N P(X = k) = 1$ c'est à dire $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.
- 2 Déterminer F_X . **Ce résultat pourra maintenant être utilisé directement**

Espérance et variance

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors :

- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Absence de mémoire

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors : $\forall m, n \in \mathbb{N}, P(X > m+n | X > m) = P(X > n)$



I Démontrer cette propriété.



On lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile et on considère X la v.a. égale au nombre de lancers.

- ① Reconnaître la loi de X , puis déterminer son espérance et sa variance.
- ② Sachant que les 5 premiers lancers sont des faces, déterminer la probabilité des événements suivants :
 - ① Le temps d'attente du premier pile est strictement supérieur à 10
 - ② Le temps d'attente du premier pile est inférieur ou égal à 10

1 Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

- Loi géométrique
- Loi de Poisson

2 Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

- Loi de probabilité et fonction de répartition
- Espérance et variance
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale

Définition (Loi de Poisson)

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et l'on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$



Approximation d'une loi de Poisson par une loi binomiale

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. avec $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$.

Si $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$, alors $P(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Une loi de Poisson de paramètre λ modélise ainsi le nombre d'occurrences, durant un laps de temps T , d'un phénomène "rare" qui se produit en moyenne λ fois pendant ce laps de temps T . On peut, par exemple, discrétiser 1 h en 3600 s.

Espérance et variance

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors :

- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$



L'accueil de l'IUT reçoit en moyenne 3 appels par heure.

On considère X la v.a. égale au nombre d'appels reçus pendant une heure.

- 1 Reconnaître la loi de X , puis déterminer son espérance et sa variance.
- 2 Déterminer la probabilité qu'aucun appel ne soit reçu pendant l'heure.

Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition
Espérance et variance
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale

- 1 Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
- 2 Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition
Espérance et variance
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale

Le monde du continu étant différent du monde discret, on se doute bien que la généralisation sera plus importante que la précédente. Ceci étant, le cas continu n'est pas fondamentalement différent du cas discret car ce sont deux variantes d'une seule et même théorie, celle de la mesure qui sort évidemment du cadre de ce cours.

En fait, il suffit de "remplacer" les sommes discrètes \sum par des sommes continues ou encore intégrales \int . Plus précisément, on a besoin de la théorie des intégrales généralisées qui sort, encore une fois, du cadre de ce cours. On se permettra néanmoins de donner quelques résultats et d'utiliser certaines lois usuelles.

Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition
Espérance et variance
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale

1 Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

- Loi géométrique
- Loi de Poisson

2 Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

- Loi de probabilité et fonction de répartition
- Espérance et variance
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale

Détermination d'une loi de probabilité

La loi d'une v.a. (absolument) continue $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est entièrement déterminée par sa fonction de densité :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, +\infty[\\ t &\longmapsto f(t) \end{aligned}$$

vérifiant $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$

On a alors : $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}, P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$



- Pour tout $x \in \mathbb{R}, P(X = x) = 0$, on pourra donc toujours travailler avec des inégalités larges
- Pour modéliser « le poids de x », on considère $P(x - \epsilon \leq X \leq x + \epsilon)$ avec ϵ très petit ce qui autorise f à dépasser 1

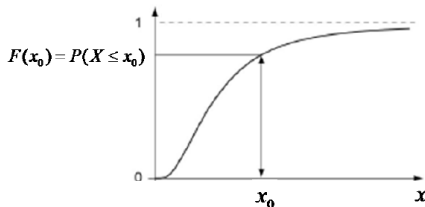
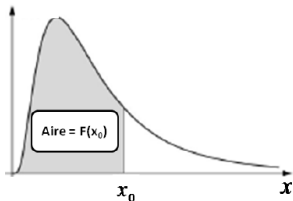
Définition (Fonction de répartition)

La fonction de répartition d'une v.a. (absolument) continue $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$
$$x \longmapsto P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$



- Elle est croissante, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$
- Elle est continue
- En dérivant F , éventuellement par morceaux, on retrouve f



Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition

Espérance et variance

Loi uniforme

Loi exponentielle

Loi normale

1 Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

- Loi géométrique
- Loi de Poisson

2 Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

- Loi de probabilité et fonction de répartition
- **Espérance et variance**
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale

Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition
Espérance et variance
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale

Définition (Espérance)

On appelle espérance de X le réel défini par $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$.

Définition (Variance)

On appelle variance de X le réel (positif) défini par $V(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t) dt$.



I Toutes les propriétés restent vraies dans le cas continu

Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition
Espérance et variance
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale

1 Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

- Loi géométrique
- Loi de Poisson

2 Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

- Loi de probabilité et fonction de répartition
- Espérance et variance
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale

Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition
Espérance et variance
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale

Définition (Loi uniforme)

On dit que X suit une loi uniforme sur $[a, b]$, et l'on note $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$ si sa fonction de densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



C'est la version continue de la loi uniforme finie, elle traduit une situation d'équiprobabilité

Fonction de répartition

Si $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$, alors sa fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$



- 1 Démontrer cette propriété.
- 2 Représenter graphiquement la densité et la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$, incontournable en simulation.

Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition
Espérance et variance
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale

Espérance et variance

Si $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$, alors :

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$



I Démontrer ces deux formules.

Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition
Espérance et variance
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale

1 Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

- Loi géométrique
- Loi de Poisson

2 Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

- Loi de probabilité et fonction de répartition
- Espérance et variance
- Loi uniforme
- **Loi exponentielle**
- Loi normale

Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition
Espérance et variance
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale

Définition (Loi exponentielle)

On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et l'on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si sa fonction de densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



C'est la version continue de la loi géométrique, elle exprime un temps d'attente ou une durée de vie

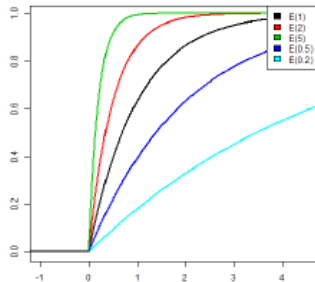
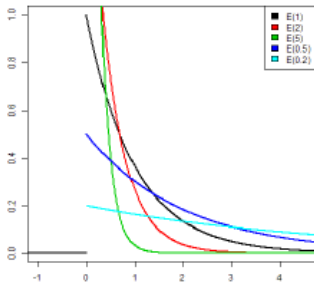
Fonction de répartition

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors sa fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



I Démontrer cette propriété.



Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition
Espérance et variance
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale

Espérance et variance

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors :

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$



Le paramètre λ représente l'inverse du temps d'attente moyen

Absence de mémoire

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors : $\forall x, t \in [0, +\infty[$, $P(X > x + t | X > x) = P(X > t)$



Des recherches épidémiologiques montrent que le temps qui s'écoule entre l'apparition de 2 cas d'une maladie rare suit une loi exponentielle. Il s'écoule en moyenne 120 jours entre 2 apparitions de cas de cette maladie. On considère X la v.a. égale au temps d'attente avant le prochain cas.

- 1 Reconnaître la loi de X .
- 2 Déterminer l'espérance et la variance de X .
- 3 Déterminer la probabilité que le temps d'attente avant le prochain cas soit de moins de 100 jours.
- 4 Déterminer la probabilité que le temps d'attente avant le prochain cas soit de plus d'un an, sachant que cela fait déjà 265 jours qu'aucun cas n'a été signalé.

Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition
Espérance et variance
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale

1 Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

- Loi géométrique
- Loi de Poisson

2 Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

- Loi de probabilité et fonction de répartition
- Espérance et variance
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale

Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition
Espérance et variance
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale

Définition (Loi normale)

On dit que X suit une loi normale (ou gaussienne) de paramètres m et σ , et l'on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ si sa fonction de densité f est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$



Elle permet de modéliser de nombreux phénomènes et est fondamentale en Statistique inférentielle

Fonction de répartition

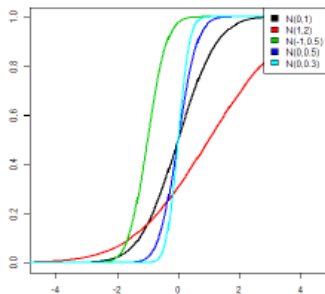
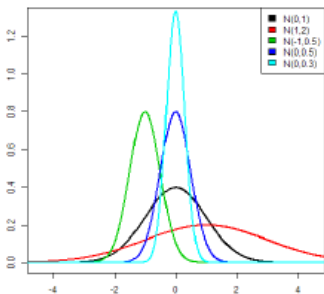
Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, alors sa fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt$$



Cette intégrale ne peut pas se calculer de manière exacte

Néanmoins, il existe une table de valeurs dans le cas $m=0$ et $\sigma=1$ qui jouera un rôle important.



Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition
Espérance et variance
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale

Espérance et variance

Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, alors :

- $E(X) = m$
- $V(X) = \sigma^2$



Le deuxième paramètre σ représente l'écart-type

Certains auteurs utilisent σ^2 comme deuxième paramètre (pas de convention universelle)

Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition
Espérance et variance
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale

Réduction et centrage

Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, alors $X^* = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.



- La loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est appelée loi normale centrée réduite
- La v.a. X^* est appelée la centrée réduite de X
- Ce résultat utilise le fait qu'une transformée affine d'une gaussienne est encore gaussienne
- Ce changement de variable est indispensable, à moins de disposer d'un ordinateur, dans les calculs de probabilités avec une gaussienne car il permet de se ramener à la table de la gaussienne centrée réduite

Fonction de répartition ϕ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Soit $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ et ϕ sa fonction de répartition.

Pour tout $x \geq 0$, on a :

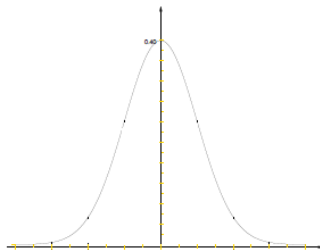
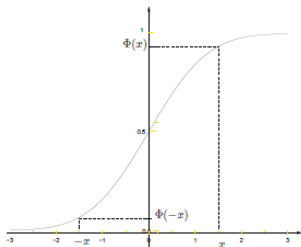
- $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$
- $P(|U| \leq x) = P(-x \leq U \leq x) = P(U \leq x) - P(U \leq -x) = 2\phi(x) - 1$



- Sauf mention contraire, U désignera une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$
- On notera ϕ , plutôt que F , la fonction de répartition de U
- Le premier point justifie que la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ ne porte que sur les positifs
- Cette table est disponible en Annexe



Le premier point $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$ est illustré par le graphique de gauche (fonction de répartition).
Illustrer-le sur le graphique de droite (densité).

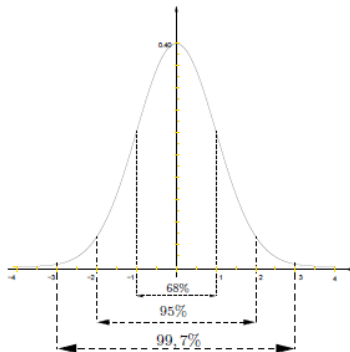


Le cas dénombrable : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Le cas continu : $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Loi de probabilité et fonction de répartition
Espérance et variance
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale



Utiliser le deuxième point $P(|U| \leq x) = 2\phi(x) - 1$ et la table pour justifier les pourcentages suivants :





On considère la v.a. X égale à la note d'un candidat ayant passé un examen.
On suppose que $X \sim \mathcal{N}(7, 2)$.

- 1 Déterminer la proportion de candidats ayant obtenu au moins 10/20.
 - 2 Déterminer le premier décile c'est à dire la note en dessous de laquelle se situent 10% des candidats.
 - 3 Le but de cette question est de réajuster à l'aide d'une transformation affine $Y = aX + b$ (a et b étant des réels positifs) les notes de la promotion de sorte que :
 - 50% des candidats aient obtenu au moins 10/20
 - le premier décile soit égal à 7
- 1 Déterminer^a la loi de Y en fonction de a et b .
 - 2 Déterminer un système de deux équations en a et b issu des deux conditions et conclure.

a. On admettra qu'une transformée affine de gaussienne est encore une gaussienne