# R3.09 - Cryptographie et sécurité
# Cours 1 - Arithmétique pour la cryptographie classique

A. Ridard

Vannes
iut
Université Bretagne Sud

# A propos de ce document

- Pour naviguer dans le document, vous pouvez utiliser :
  - le menu (en haut à gauche)
  - l'icône en dessous du logo IUT
  - les différents liens
- Pour signaler une erreur, vous pouvez envoyer un message à l'adresse suivante : anthony.ridard@univ-ubs.fr

# Plan du cours



Vannes iut Université Bretagne Sud

**Sauf mention contraire, $a$ et $b$ désignent des entiers relatifs.**

**Définition**

On dit que $a$ *divise* $b$ ou que $a$ est un *diviseur* de $b$ ou que $b$ est un *multiple* de $a$ si :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, b = ka$$

**Notations**

- Si $a$ divise $b$, on note : $a|b$
- L'ensemble des diviseurs de $b$ est noté $\mathscr{D}(b)$
- L'ensemble des multiples de $a$ est noté $a\mathbb{Z}$

**Exemples**

Déterminer $\mathscr{D}(12)$ et $\mathscr{D}(10)$.

## Cas particuliers

- 1 et -1 divisent tous les entiers mais ne sont divisibles que par 1 et -1
- 0 est multiple de tous les entiers mais n'est diviseur que de lui-même

## Relation d'ordre

La relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$ est réflexive et transitive mais n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique, contrairement à la divisibilité dans $\mathbb{N}$. D'ailleurs, pour cet ordre (partiel), le plus petit élément est 1 et le plus grand est 0. Enfin, la divisibilité dans $\mathbb{N}^*$ est liée à l'ordre (total) naturel de $\mathbb{N}^*$ :

$$a|b \Rightarrow a \leq b$$

**Propriété (division euclidienne)**

Si $b$ est non nul, alors il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$a = bq + r \qquad \text{avec} \quad 0 \leq r < |b|$$

**Vocabulaire**

Déterminer les entiers $q$ et $r$, c'est effectuer la division euclidienne de $a$ par $b$.
$a$ est le *dividende*, $b$ le *diviseur*, $q$ le *quotient* et $r$ le *reste*.

**Exemples**

- Effectuer la division euclidienne de -56 par 17
- Effectuer la division euclidienne de 32 par -7

**Définition (pgcd)**

Soit $(a,b) \neq (0,0)$.
Le Plus Grand Commun Diviseur de a et b, noté $pgcd(a,b)$, est le plus grand entier positif qui divise à la fois $a$ et $b$.

**Propriété (théorème de Bézout)**

Si $(a,b) \neq (0,0)$, alors il existe un couple $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$ua + vb = pgcd(a,b)$$

Le couple $(u,v)$ dans l'identité de Bézout n'est pas unique.

**Exemple**

- Déterminer $pgcd(12,10)$.
- Trouver une identité de Bézout entre 12 et 10.
- En déduire une autre identité.

## Algorithme d'Euclide étendu

Il permet de calculer simultanément $pgcd(a,b)$ et deux entiers $u$ et $v$ tels que :

$$au + bv = pgcd(a,b)$$

On peut supposer $a \geq b > 0$ sans perdre de généralité [a].

On calcule une suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de restes obtenus par divisions euclidiennes successives à partir de $r_0 = a$ et $r_1 = b$ :

- $r_0 = r_1 q_1 + r_2$ avec $0 \leq r_2 < r_1$
- $r_1 = r_2 q_2 + r_3$ avec $0 \leq r_3 < r_2$
- ...
- $r_{k-2} = r_{k-1} q_{k-1} + r_k$ avec $0 \leq r_k < r_{k-1}$
- $r_{k-1} = r_k q_k + r_{k+1}$ avec $0 \leq r_{k+1} < r_k$

Ainsi que deux suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par une récurrence d'ordre 2 :

- $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_{k+1} = u_{k-1} - u_k q_k \end{cases}$
- $\begin{cases} v_0 = 0,\ v_1 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ v_{k+1} = v_{k-1} - v_k q_k \end{cases}$

a. Cela vient du fait que $pgcd(a,b) = pgcd(|a|,|b|)$ et $pgcd(a,0) = a$

## Algorithme d'Euclide étendu (fin)

En notant $r_n$ le dernier reste non nul [a], on a [b] :

$$pgcd(a,b) = pgcd(r_n, r_{n+1}) = pgcd(r_n, 0) = r_n = au_n + bv_n$$

Dans la pratique, on pourra utiliser un tableau pour effectuer les calculs :

| $k$ | $r_k$ | $u_k$ | $v_k$ | $q_k$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 366 | 1 | 0 | | |
| 1 | 56 | 0 | 1 | 6 | $(366 = 6 \times 56 + 30)$ |
| 2 | 30 | 1 | $-6$ | 1 | $(56 = 1 \times 30 + 26)$ |
| 3 | 26 | $-1$ | 7 | 1 | $(30 = 1 \times 26 + 4)$ |
| 4 | 4 | 2 | $-13$ | 6 | $(26 = 6 \times 4 + 2)$ |
| 5 | 2 | $-13$ | 85 | 2 | $(4 = 2 \times 2 = 0)$ |
| 6 | 0 | | | | |

On en tire :

$$pgcd(366,56) = 2 \quad \text{et} \quad 2 = 366 \times (-13) + 56 \times 85$$

*a*. La suite des restes étant une suite strictement décroissante d'entiers positifs, on obtient nécessairement un reste nul au bout d'un nombre fini de divisions.

*b*. Cela repose sur les deux résultats suivants :

- Si $r$ est le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$, alors $pgcd(a,b) = pgcd(b,r)$
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $r_k = au_k + bv_k$

**Exemples**

- Déterminer une identité de Bézout entre 17 et 9
- Déterminer une identité de Bézout entre -48 et 27

Montrer que $pgcd(a,b)$ est le plus grand élément de l'ensemble des diviseurs communs à $a$ et $b$, **au sens de la divisibilité** [a].

a. Il s'agit de montrer : $\forall d \in \mathbb{Z},\ (d|a \text{ et } d|b) \Longrightarrow d|pgcd(a,b)$

**ppcm**

Le Plus Petit Commun Multiple de a et b, noté $ppcm(a,b)$, est le plus petit entier strictement positif qui soit multiple de $a$ et $b$.

Montrer que $ppcm(a,b)$ est le plus petit élément de l'ensemble des multiples communs à $a$ et $b$, **au sens de la divisibilité** [a].

a. Il s'agit de montrer : $\forall m \in \mathbb{Z},\ (a|m \text{ et } b|m) \Longrightarrow ppcm(a,b)|m$

**Définition (entiers premiers entre eux)**

On dit que $a$ et $b$ sont *premiers entre eux* si $pgcd(a,b)=1$.

**Propriété (caractérisation)**

$a$ et $b$ sont *premiers entre eux* si et seulement s'il existe un couple $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que :

$$ua+vb=1$$

**Preuve**

Démontrer la propriété.

**Lemme de Gauss**

Montrer que si $a$ divise $bc$ tout en étant premier avec $b$, alors $a$ divise $c$.


Montrer que : $pgcd(a,b) \times ppcm(a,b) = |ab|$

**Définition (entier premier)**

On dit qu'un entier $n \geq 2$ est *premier* si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui même.

1. Montrer que tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.
2. En déduire que l''ensemble $\mathscr{P}$ des nombres premiers est infini.

**Propriété (décomposition en facteurs premiers)**

Tout entier $n \geq 2$ admet une unique décomposition de la forme :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

où les $p_k$ sont des nombres premiers vérifiant $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$
et les $\alpha_k$ des entiers naturels non nuls.

Cette décomposition peut aussi s'écrire :

$$n = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\alpha_p}$$

avec $\alpha_p = 0$ si $p \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$

1. Décomposer en facteurs premiers 60 et 50.
2. Calculer puis décomposer en facteurs premiers :
   - $pgcd(50,60)$
   - $ppcm(50,60)$
3. On considère $a$ et $b$ des entiers $(\geq 2)$ tels que :

$$a = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\alpha_p} \quad \text{et} \quad b = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\beta_p}$$

   Conjecturer la décomposition en facteurs premiers de :
   - $pgcd(a,b)$
   - $ppcm(a,b)$
4. Retrouver la formule $pgcd(a,b) \times ppcm(a,b) = |ab|$.

Vannes iut : Université Bretagne Sud

**Sauf mention contraire, $n$ désigne un entier naturel, et $a, b$ des entiers relatifs.**

## Définition (congruence modulo $n$)

On dit que $a$ et $b$ sont *congrus modulo* $n$ s'ils ont le même reste dans la division euclidienne par $n$, autrement dit si $a-b$ est multiple de $n$ ou encore s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$.

- Si $a$ et $b$ sont congrus modulo $n$, on note : $a \equiv b \mod n$
- La congruence modulo $n$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$
- L'ensemble des classes d'équivalence est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\right\}$
- $\overline{a} = \overline{b} \iff a \equiv b \mod n$
- Si $r$ est le reste de la division euclidienne de $a$ par $n$, alors $\overline{a} = \overline{r}$

Par abus [a], il est possible de noter tout simplement :

- « $a \equiv b$ » au lieu de « $a \equiv b \mod n$ »
- « $a$ » au lieu de « $\overline{a}$ » et donc « $a = b$ » au lieu de « $\overline{a} = \overline{b}$ »

a. En l'absence d'ambiguïté et lorsqu'on maitrise pour ne pas perdre le contrôle

**Propriété (la congruence respecte l'addition et la multiplication)**

Si $a \equiv a' \mod n$ et si $b \equiv b' \mod n$, alors

$$\begin{aligned} a+b &\equiv a'+b' \mod n \\ ab &\equiv a'b' \mod n \end{aligned}$$

- La congruence respecte aussi la puissance [a] :
  Si $a \equiv b \mod n$, alors $a^k \equiv b^k \mod n$
- On peut définir sur l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ une addition et une multiplication :

$$\overline{a}+\overline{b} = \overline{a+b} \quad \text{et} \quad \overline{a}\times\overline{b} = \overline{a\times b}$$

- Muni de ces deux opérations, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a une structure d'anneau commutatif qui permet de calculer "comme d'habitude" **SAUF pour les inverses**

a. Les formules $a^{k+l} = a^k a^l$ et $a^{kl} = \left(a^k\right)^l$ sont encore valables modulo $n$

1. Pour tout $\overline{a} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, déterminer son opposé $-\overline{a}$.
2. Dresser la table de multiplication de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
3. Reprenez les questions précédentes avec $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

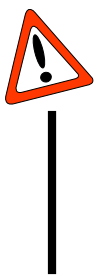
## Définition (inversible modulo $n$)

On dit que $a$ est *inversible modulo* $n$ s'il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$ab \equiv 1 \mod n$$

Dans ce cas, $b$ est unique modulo $n$, appelé inverse de $a$ modulo $n$ et noté $a^{-1} \mod n$.

- 0 n'est jamais inversible modulo $n$, 1 l'est toujours
- On dit aussi que $\overline{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ s'il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{a}\overline{b} = \overline{1}$
- On note $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$



- Contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Q}$, dans $\mathbb{C}$ ou tout autre « corps », un élément non nul de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas toujours inversible
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mais $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ n'est pas égal à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \setminus \{\overline{0}\}$ en général

Vannes
Université Bretagne Sud

1. A l'aide des tables de multiplication précédentes, déterminer les éléments inversibles et leurs inverses dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. Comment peut-on expliquer cette différence ?

**Propriété (CNS pour être inversible modulo $n$)**

$a$ est inversible modulo $n$ si et seulement si $pgcd(a,n)=1$.

Dans ce cas, $a^{-1} \mod n$ est fourni par une identité de Bézout entre $a$ et $n$ : si $au+nv=1$, alors $au \equiv 1 \mod n$ et donc $a^{-1} \equiv u \mod n$.

- L'algorithme d'Euclide étendu entre $a$ et $n$ permet de décider si $a$ est inversible modulo $n$, mais aussi de calculer son inverse le cas échéant
- Si $n=p$ est premier, tout élément non nul de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est inversible [a] et $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \setminus \{\overline{0}\} = \left\{\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}\right\}$

a. Il s'agit d'un « corps fini » à $p$ éléments

Démontrer cette propriété.

1. Résoudre $3x+2=0$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. Résoudre $5x+4=1$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
3. Résoudre $4x^2+2=0$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

1. A l'aide des tables de multiplication précédentes, que peut-on remarquer concernant les éléments non inversibles dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ?
2. 1 est toujours un carré mais combien possède-t-il de racines carrées dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ? dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ? dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ?
3. Tous les éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sont-ils des carrés ?
4. Que se passe-t-il dans $\mathbb{R}$ ? dans $\mathbb{C}$ ?

Vannes
Université Bretagne Sud

**Inverser une matrice à l'aide de sa comatrice**

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice à coefficient dans un anneau commutatif $K$.

- Le cofacteur d'indice $i,j$ de $A$ est défini par :

$$(-1)^{i+j}\det\left(A_{i,j}\right)$$

où $A_{i,j}$ est déduite de A en supprimant la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne.

- La matrice des cofacteurs, appelée comatrice, vérifie :

$$A\left(com(A)\right)^t = \left(com(A)\right)^t A = \det(A) I_n$$

- $A$ est donc inversible si et seulement si $\det(A)$ est inversible dans $K$. Dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \det(A)^{-1}\left(com(A)\right)^t$$

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau commutatif
- Le deuxième point se démontre à l'aide des formules de Laplace [a] :
  - par rapport à la colonne $j$ :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det\left(A_{i,j}\right)$$

  - par rapport à la ligne $i$ :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det\left(A_{i,j}\right)$$

- Si $K$ est un corps [b], $\det(A)$ est inversible si et seulement s'il est non nul.
- Si $K = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\det(A)$ est inversible si et seulement s'il est premier avec $n$

---

*a*. Ces formules sont utilisées pour développer un déterminant selon une colonne ou une ligne

*b*. Par exemple, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p$ premier

Vannes iut Université Bretagne Sud

## Inversion modulaire d'une matrice

1. Calculer $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \mod 21$
2. Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \mod 35$