IUFM d'Aquitaine

Site de : Mérignac

L'enseignement du calcul aujourd'hui

Difficultés et recommandations

Mémoire professionnel présenté par : **Ridard, Anthony**

Qualité : professeur stagiaire

Tuteur / Formateur : **Clinard, Michel**

Discipline : Mathématiques

Année : 2005-06

Thème du mémoire :

L'enseignement du calcul aujourd'hui : difficultés et recommandations.

Résumé d'auteur :

L'enseignement du calcul est aujourd'hui profondément déstabilisé par l'évolution technologique, les rapports inadéquats entre calcul et raisonnement ainsi que le manque de complémentarité entre calcul exact et calcul approché. Se pose alors la question de sa revalorisation.

Mots-clés :

- Enseignement du calcul
- Intégration des outils de calcul
- Calcul et raisonnement
- Calcul exact et calcul approché

Informations concernant l'établissement en responsabilité :

Nom : Collège Claude Massé d'Ambares et Lagrave

Niveau de la classe prise en charge : 4ème

Effectif : 30 élèves

L’enseignement du calcul aujourd’hui

Table des matières

Bibliographie

- COMMISSION DE REFLEXION SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

  Rapport d'étape sur le calcul
- ARTIGUE Michèle

  L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives - Repère n° 54 p 23
- DAUDIN Christophe

  Le calcul c'est dépassé - APMEP n° 446 p 340
- DJAMENT Daniel

  Réhabiliter le calcul mental - APMEP n° 406 p 533
- LEGRAND Pierre

  La calculatrice au collège - Les maths en collège et en lycée p 150
- OLIVIER Pierre et BOUVIER Jean-Pierre

  Calculatrices en Mathématiques – CRDP de POITOU-CHARENTES

Introduction

Quand on pense au calcul aujourd'hui, on ne peut manquer d'être frappé par les visons contrastées que ce terme suscite.

Ce qui attire l'attention c'est d'abord, le rôle essentiel que joue le calcul dans l'activité mathématique, dans les relations entre mathématiques et autres disciplines ou entre mathématiques et société, mais c'est aussi, la richesse du monde mathématique du calcul et sa vitalité, nourrie notamment par l'évolution technologique.

Et pourtant, quand on enseigne les mathématiques à l'école élémentaire, au collège ou au lycée, ce ne sont pas ces visions positives sur le calcul qui dominent, mais plutôt la vision d'un objet profondément déstabilisé.

Ce contraste éveille des interrogations inquiétantes et met l'enseignement même des mathématiques en danger : « Mais monsieur, pourquoi doit-on apprendre toutes ces règles de calcul alors qu'on peut utiliser une calculatrice ? ».

Ne devons-nous pas, alors, faire de la revalorisation du calcul une priorité ?

En premier lieu, nous nous attacherons à identifier les facteurs qui déstabilisent l'enseignement du calcul afin de proposer, dans un deuxième temps, certains axes d'amélioration. Enfin, nous nous intéresserons, d'un point de vue plus pratique, à l'intégration des outils dans l'enseignement du calcul, peut-être la clé de la revalorisation visée.

I. Ce qui déstabilise l'enseignement du calcul.

I.1. L'évolution technologique.

Le développement des technologies informatiques a évidemment modifié les pratiques associées au calcul, tant les pratiques scientifiques que les pratiques professionnelles et sociales, mais il a aussi déstabilisé l'enseignement du calcul.

La plupart des algorithmes numériques dont l'apprentissage occupait un temps important de la scolarité sont, aujourd'hui, implémentés dans les calculatrices les plus simples. On peut penser, par exemple, aux quatre opérations élémentaires mais aussi à l'extraction de racines carrées dont la technique opératoire fût abandonnée dans les années 1960.
En fait, le problème qui s'est d'abord posé au niveau élémentaire pour les algorithmes numériques se pose de plus en plus au niveau secondaire pour le calcul algébrique et l'analyse, avec l'implémentation de logiciels de calcul formel dans les calculatrices. On peut penser, cette fois, à la résolution d'une équation mais aussi à l'étude d'une fonction (dérivée et variations, dérivée seconde et convexité, limites et asymptotes, extrema, zéros…) ou encore à l'étude d'une suite (monotonie, limite, somme des termes…).
En revanche, ce développement des technologies informatiques met sur le devant de la scène des questions essentielles que l'enseignement du calcul n'a pas pour l'instant pris en charge, si ce n'est à des niveaux très avancés comme ceux de la représentation des données, de la complexité et de l'efficacité des algorithmes au-delà de leur seule validité.

Comment, alors, prendre en compte ces évolutions technologiques pour définir les enjeux de l'enseignement du calcul aujourd'hui ?

I.2. Les rapports entre calcul et raisonnement.

La vision des rapports entre calcul et raisonnement est une deuxième raison à cette déstabilisation de l'enseignement du calcul.

Dans la culture, les deux termes « calcul » et « raisonnement » apparaissent comme antagonistes. Le calcul est opposé au raisonnement tant dans les démarches de pensée qu'il met en œuvre que dans les formes d'apprentissage qu'il requiert. Le calcul renvoie à une activité automatisable, sans intelligence, il est réduit à sa part mécanisée. Son apprentissage renvoie à l'idée d'entraînement purement répétitif. En fait, le calcul est perçu comme renvoyant aux basses œuvres du travail mathématique, tandis que sa partie noble, celle du raisonnement, est plutôt associée à la résolution de problèmes géométriques. D'ailleurs, cette vision culturelle n'est pas le fruit du hasard. Elle reflète les pratiques profondes de l'enseignement et la difficulté que nous avons à nouer des rapports adéquats entre calcul et raisonnement. Et le fait que l'entrée dans la rationalité mathématique, en France, contrairement à ce qui se passe dans d'autres pays, soit toujours pensée et organisée à travers la géométrie synthétique ne favorise pas l'évolution des points de vue.

Comment, alors, construire des rapports adéquats entre calcul et raisonnement ?

I.3. Les rapports entre calcul exact et calcul approché.

Une troisième raison à cette déstabilisation de l'enseignement du calcul est la vison des rapports entre calcul exact et calcul approché.

Dans la culture, le calcul approché est vu comme un calcul par défaut, celui auquel on se résout quand le calcul exact s'avère impossible mais la réalité est bien plus complexe. En effet, dans la résolution de nombreux problèmes où sont engagées les mathématiques aujourd'hui, la recherche de solutions exactes n'est ni pertinente, ni utile. Et, même quand le calcul exact est visé et possible, ses résultats ne sont pas nécessairement exploitables sans interaction avec du calcul approché. En fait, les rapports entre calcul exact et calcul approché ne sont pas vus dans leur complémentarité mais dans une opposition hiérarchique de valeurs, le calcul noble étant le calcul exact. D'ailleurs, l'enseignement n'échappe pas à cette vision culturelle et la part accordée au calcul approché y est réduite. Pourtant, si l'on en croit les travaux des cogniticiens, l'être humain serait naturellement équipé de capacités lui permettant un calcul approché rudimentaire. Par exemple, très tôt, le bébé est capable de comparer des quantités. Quant au calcul exact, il renverrait à des processus cognitifs distincts, sollicitant en particulier des mémorisations de type langagier, et le cerveau humain y serait naturellement moins adapté. D'où le coût élevé, à l'apprentissage, des moyens du calcul exact que sont par exemple les tables d'addition et de multiplication. Bien entendu, tout calcul approché un tant soit peu complexe implique aussi du calcul exact.

Comment, alors, faire vivre de façon satisfaisante la complémentarité entre calcul exact et calcul approché ?

I.4. Les rapports entre technique et conceptuel dans l'apprentissage.

Une dernière raison à cette déstabilisation de l'enseignement du calcul est la vision des rapports entre technique et conceptuel dans l'apprentissage.

Depuis une vingtaine d'année, les approches qualifiées de constructivistes constituent les paradigmes dominants. Elles ont permis de contrer une vision purement transmissive de l'apprentissage, de mettre l'accent sur les processus d'adaptation individuels et sociaux en jeu dans l'apprentissage, de mieux comprendre les constructions cognitives en mathématiques et de montrer les limites de pratiques enseignantes trop centrées sur l'apprentissage de techniques.
Initialement théories de l'apprentissage, elles se sont transposées en théories de l'enseignement sans éviter les simplifications abusives. Pour promouvoir le travail conceptuel en mathématiques, on a alors souvent péjoré le travail technique qui occupait un espace jugé démesuré, en oubliant leurs rapports dialectiques. La perception du calcul, son rôle dans les apprentissages et l'attention à lui accorder dans l'enseignement s'en sont trouvées durablement affectées. Le développement de compétences de calcul a eu tendance à apparaître comme une question secondaire, une question d'intendance, comme si, parodiant Boileau, l'on pouvait affirmer que « ce qui se conçoit bien, se calcule aisément ». La valeur épistémique des gestes du calcul, c'est-à-dire le fait que ces gestes jouent un rôle essentiel dans la compréhension des objets qu'ils engagent, s'en est trouvée occultée.

II. Pour un meilleur équilibre.

II.1. Intégrer les outils de calcul.

Les besoins sociaux comme scientifiques du calcul ne sont pas aujourd'hui les mêmes qu'hier. Ils se sont notamment déplacés de capacités d'exécution à des capacités d'anticipation, de contrôle et d'adaptation. N'est-ce pas une opportunité pour construire dans l'enseignement des rapports plus adéquats entre calcul et raisonnement, pour rendre à nouveau visible le fait que tout calcul, dès qu'il n'est pas complètement routinier, est une subtile alchimie de parties routinières et de raisonnements ?

Par ailleurs, pendant les vingt dernières années, les technologies disponibles pour assister le calcul dans l'enseignement secondaire ont été essentiellement des technologies de calcul approché, ceci confortant la rupture entre le monde du calcul exact et celui du calcul approché. Aujourd'hui, le calcul exact devient accessible sur des calculatrices. N'est-ce pas aussi une opportunité pour construire des rapports plus adéquats entre ces deux types de calcul ?

Bien sûr, saisir ces opportunités c'est arriver à construire des rapports adéquats aux outils du calcul, qu'il s'agisse des calculatrices, des tableurs ou des logiciels de calcul formel. C'est penser comment ces outils peuvent accompagner l'apprentissage du calcul et des mathématiques, devenir pour les élèves de réels instruments mathématiques, en évitant les positions caricaturales : « les machines prenant en charge le calcul, plus n'est besoin d'apprendre des mathématiques », ou inversement, « si l'on veut apprendre des mathématiques, il faut mettre à l'écart ces dangereux objets qui empêchent d'apprendre, en prenant le travail de l'élève ». En bref, saisir ces opportunités c'est intégrer les outils de calcul à l'enseignement.

Or, dans la situation actuelle, l'utilisation de ces outils est acceptée mais il n'y a pas réellement d'intégration et on s'aperçoit que les élèves maîtrisent très peu les outils dont ils disposent. Ils savent les utiliser quand d'emblée ils fournissent la réponse demandée mais ils sont peu capables de s'adapter si ce n'est pas le cas, encore moins de contrôler les résultats obtenus.

En fait, l'intégration de ces outils ne va pas de soi, elle nécessite des compétences mathématiques qui ne sont pas, dans la situation actuelle, visées par l'enseignement. Il convient donc de bien les identifier pour les prendre en compte sérieusement dans la définition des objectifs de l'enseignement. Et certainement pas, chercher ce qui dans l'utilisation des outils de calcul peut servir la réalisation d'objectifs essentiellement pensés en dehors de ces outils.

Enfin, il ne faut pas s'imaginer que le seul objectif de l'enseignement du calcul soit de rendre les élèves capables de calculer, sans assistance quand le calcul reste techniquement simple, de façon assistée par des calculatrices et logiciels quand sa complexité augmente. En effet, calcul et développement des concepts sont en mathématiques intrinsèquement liés et c'est en fonction de cette interaction que doit être aussi pensée l'utilisation des outils de calcul. Ceci nécessite de décider, en fonction de telle ou telle séance, si le calcul sera instrumenté ou non et dans quelles conditions. Il n'y a pas là de règle générale et le rôle que les outils joueront dans le calcul variera suivant les moments de l'apprentissage mais aussi suivant les stratégies d'enseignement choisies par tel ou tel professeur. Certains accepteront ainsi de faire fonctionner la machine comme une boîte noire, productrice d'une certaine réalité expérimentale à laquelle il faudra donner sens en l'organisant et en introduisant les concepts nécessaires. D'autres y seront plus réticents et préfèreront réserver l'usage de la machine à un moment de l'apprentissage où un certain niveau de conceptualisation, qui permette un contrôle minimal des productions de la machine, semble atteint. Mais, quels que soient les choix effectués, ceci nécessite la construction de situations où l'utilisation des outils de calcul ne dispense pas de penser. Il ne suffit pas pour cela en général de rajouter la machine dans une situation organisée pour un environnement en papier / crayon. Il y a là sans aucun doute un effort de créativité indéniable à mettre en jeu, de nombreux travaux de recherche sur les calculatrices et logiciels montrant clairement l'inadéquation, dans cette esprit, de beaucoup des situations de calcul ordinaire, pensées pour être gérables et efficaces en papier / crayon.

II.2. Penser le calcul.

Le calcul mental constitue un premier espace où peut se déployer le raisonnement en mettant en jeu les propriétés des nombres et des opérations. Il n'est bien sûr pas question ici de viser l'apprentissage de technique ad hoc de calcul mental mais d'utiliser ce calcul pour susciter une réflexion, les techniques opératoires usuelles étant trop coûteuses en mémoire pour se prêter à une exécution mentale, pour mettre en évidence la diversité des façons possibles d'aborder un calcul, en comparant leurs coûts et les connaissances qui les fondent ou pour susciter des généralisations. En fait, ce qui est important dans ce calcul mental, c'est qu'il oblige à penser le calcul, de façon flexible, alors que l'algorithme, une fois installé, le rigidifie.

Le calcul algébrique constitue un deuxième espace où peut se déployer le raisonnement en permettant notamment d'expliquer, de généraliser des constats numériques. L'enseignement est jusqu'ici assez peu sensible à cette fonction du calcul algébrique, comme outil de preuve. Il se prive ainsi de revisiter d'un point de vue avancé, les connaissances élémentaires du cadre numérique.
En fait, les rapports entre calcul algébrique et raisonnement deviendront satisfaisants dès que le calcul ne se limitera pas à l'exécution d'algorithmes familiers, dans la résolution d'exercices routiniers, donc dès que, le calcul sera pensé, raisonné, réfléchi. C'est d'autant plus le cas que, dans un univers instrumenté par les calculatrices et logiciels, les calculs que les élèves ont à savoir maîtriser sont le plus souvent trivialisés par les outils de calcul.

II.3. Valoriser le calcul approché.

La notion d'ordre de grandeur est une notion qui peut constituer un fil conducteur, tout au long de la scolarité, et permettre au calcul approché d'être vu à sa juste valeur.

A l'école élémentaire, la notion d'ordre de grandeur intervient dans le contrôle des productions machines qui prend une importance accrue étant donné que, dans toutes les pratiques sociales aujourd'hui, les calculs sont pris en charge le plus souvent par des machines.

Au collège et au début du lycée, elle va prendre une nouvelle dimension grâce au calcul sur les puissances. Ceci doit permettre de découvrir l'éventail des échelles de grandeur pouvant intervenir dans la modélisation de phénomènes physiques ou biologiques, et donc, d'approcher le « très grand » et le « très petit ».

Cette prise en compte des ordres de grandeur prépare aussi le terrain pour l'enseignement de l'analyse où la notion d'ordre de grandeur deviendra cette fois constitutive même du calcul, parce que constitutive des concepts qui le sous-tendent. Raisonner le calcul en termes d'ordre de grandeur devient en effet absolument essentiel en analyse. Pour illustrer ce propos, je vais donner un joli exemple rapporté par Michèle Artigue :

« L'exercice est en fait banal, il s'agit d'étudier la convergence de la série numérique de terme général : $u_n = (-1)^n \frac{n\ln(n)}{n^2+1}$.

Face à un tel exercice, mes étudiants reconnaissent très vite qu'il n'y a pas convergence absolue car la valeur absolue du terme général est équivalente à $\frac{\ln(n)}{n}$, terme général d'une série de Bertrand divergente. Ce faisant, ils utilisent, d'une façon qui leur est devenue transparente tant elle est routinière, ce calcul algébrique intégrant les ordres de grandeur via la notion de négligeabilité relative (ici la négligeabilité de 1 devant n^2 au voisinage de l'infini) pour se ramener à un objet connu : une série de Bertrand, et le fait que c'est l'ordre de grandeur de la valeur absolue du terme général qui conditionne la convergence absolue de la série.
Ils se tournent alors vers le critère des séries alternées dont les deux premières conditions (vérifier que la série est bien alternée et que son terme général tend vers 0 quand n tend vers l'infini) sont à l'évidence satisfaites. Reste à satisfaire la condition de décroissance : à partir d'un certain rang, la suite des valeurs absolues est décroissante. Ils envisagent pour vérifier cette condition différentes stratégies : calculer la différence ou le quotient de deux termes successifs, introduire la fonction f définie par $f(x) = \frac{x\ln(x)}{x^2+1}$ pour x strictement positif et étudier ses variations. Les deux premières méthodes n'aboutissent pas. Quant à la troisième, elle conduit à étudier le signe de la dérivée définie par $f'(x) = \frac{(1-x^2)\ln(x)+1+x^2}{(1+x^2)^2}$ pour x strictement positif. Le signe du numérateur n'apparaissant pas évident, une nouvelle fonction auxiliaire est introduite et dérivée à son tour et … un long moment plus tard, la recherche n'a toujours pas abouti. Il n'est venu à aucun étudiant, spontanément, l'idée d'évaluer l'ordre de grandeur de ce numérateur pour x grand pour s'apercevoir que la limite en plus l'infini en est moins l'infini et que donc l'expression sera nécessairement négative pour x suffisamment grand, et la suite donc décroissante à partir d'un certain rang.

Ce n'est bien sûr qu'un exemple mais, de manière générale, même ces étudiants qui ont derrière eux des années de travail dans le champ de l'analyse n'ont dans leur très grande majorité pas compris les ressorts profonds de ce double jeu de localisation et d'intégration des ordres de grandeur au calcul qui est une spécificité essentielle du calcul en analyse. Quand on leur explique comment ils auraient pu économiser leur travail ou éviter un blocage, en exploitant ces ressorts dans une situation comme celle présentée ci-dessus, on a l'impression que c'est pour eux une réelle découverte, que jamais ils n'ont perçu les choses et le calcul sous cette angle ».

III. Intégration de la calculatrice en 4ème.

III.1. Une expérience révélatrice.

Pour chaque calcul, donner le résultat et indiquer la méthode utilisée en cochant la case correspondante.
Si vous avez coché la case « A la main », détaillez le calcul au verso.

		Résultat	Méthode utilisée		
			Avec calculatrice	Mentalement	A la main
1	$123456+3000$				
2	$123456-3000$				
3	$123{,}456\times100000$				
4	$123{,}456\div100000$				
5	$6\times10000+7\times100+2$				
6	4^2				
7	17^2				
8	$\sqrt{25}$				
9	$\sqrt{324}$				
10	$123{,}456\times10^5$				
11	$123{,}456\times10^{-5}$				
12	$6\times10^4+7\times10^2+2$				
13	$10^{15}\times123{,}456\times10^{-15}$				
14	$10^{15}+1-10^{15}$				
15	$\cos60°$				
16	$\dfrac{49\times\cos60°}{\cos60°\times7}$				
17	$\left(1-\dfrac{3}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)$				
18	$\dfrac{56\times987654}{987654\times7}$				
19	$\dfrac{6}{5+\dfrac{6}{5+\dfrac{6}{17-11}}}$				
20	La somme des entiers de 1 à 99 : 1+2+3+…+97+98+99				

Description et analyse des résultats :

	Avec calculatrice	Mentalement	A la main	Non fait
1	2	25	3	
2	2	27	1	
3	8	22		
4	8	22		
5	9	18	2	1
6	1	29		
7	16	10	4	
8	4	26		
9	24	6		
10	15	15		
11	5	17		8
12	11	16	1	2
13	5	18	1	6
14	9	17	1	3
15	30			
16	17	5	2	6
17	19	8	1	2
18	24	2	1	3
19	13	4	3	10
20	12	1	2	15

- Calculs 1 et 2 : Presque personne n'utilise la calculatrice, c'est rassurant. Ceci dit, huit élèves ressentent le besoin de poser l'addition, c'est un peu moins rassurant.

- Calculs 3 et 4 : Visiblement, multiplier ou diviser effraient un peu plus les élèves qu'additionner ou soustraire même quand il s'agit de multiplier ou diviser par 100000. A moins que ce ne soit le 100000 qui soit plus effrayant que le 3000. En tout cas, on s'aperçoit déjà que pour au moins huit élèves, il est plus facile ou plus rassurant d'utiliser la calculatrice pour multiplier ou diviser par 100000. C'est peut-être parce qu'ils ne font pas spontanément le lien avec le décalage de la virgule de cinq rangs vers la droite ou vers la gauche.

- Calcul 5 : Les difficultés pressenties aux calculs 3 et 4 se confirment pour les élèves ayant utilisé la calculatrice. Ils ne maîtrisent visiblement pas le système décimal.

- Calculs 6 et 7 : Aucune surprise pour le calcul 6 mais un certain étonnement quant au calcul 7. Je m'attendais en effet à une plus grande utilisation de la calculatrice. En réalité, je pense que certains élèves ont opté pour le calcul mental ou celui à la main plutôt que pour la calculatrice, tout simplement parce qu'ils sont convaincus que la calculatrice est moins respectable ou moins apprécié du professeur. On doit impérativement lutter contre cette vision caricaturale de la calculatrice qui en fait un objet tabou en mathématiques. Ceci dit, le calcul mental a trop souvent fourni le résultat 149, erreur classique qui consiste à croire que la fonction carrée est linéaire!

- Calculs 8 et 9 : Le calcul 8 révèle que les élèves voient déjà, même si ce n'est pas tout à fait au programme, $\sqrt{x}$ comme le nombre qui a pour carré x et pas seulement comme une touche de la calculatrice, dépourvue de sens. Notons aussi que le calcul 9 conforte l'idée que la calculatrice apparaît pour certains comme un objet tabou.

- Calculs 10, 11, 12, 13 et 14 : Trop d'élèves se réfugient dans la calculatrice quand ils voient apparaître les puissances de dix, elle leur sert ici de « béquille ». Malheureusement, son utilisation n'est pas encore bien maîtrisée dans ce domaine et le contrôle des résultats fournis n'est pas aisé quand on ne domine pas suffisamment les objets mathématiques en jeu.

- Calcul 15 : Un franc succès.

- Calculs 16 et 18 : Ces calculs ont été traités moyennant la calculatrice par la majorité des élèves. Ils n'ont pas vu la simplification possible et se sont lancés « tête baissée » dans le calcul du quotient avec en prime quelques erreurs liées au manque de parenthèse.

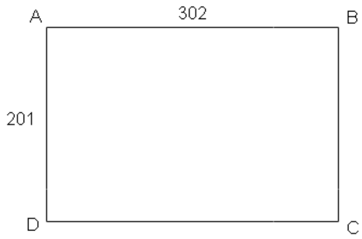
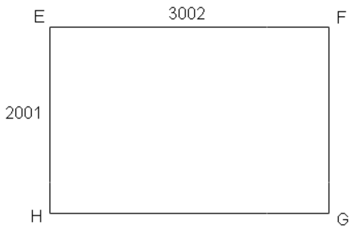
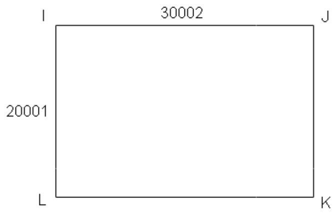
- Calcul 17 et 19 : Trop d'élèves ont préféré la calculatrice au calcul mental ou à la main, sûrement pour une question de fiabilité mais c'était sans compter sur les erreurs liées encore une fois au manque de parenthèses.

- Calcul 20 : A mon grand étonnement, beaucoup ont utilisé la calculatrice sans que la longueur du calcul ne les fasse hésiter, malheureusement, autant de manipulations s'est souvent soldé par un résultat erroné. En revanche, trois élèves ont, à la manière de Gauss alors âgé de 9 ans, trouvé le bon résultat.

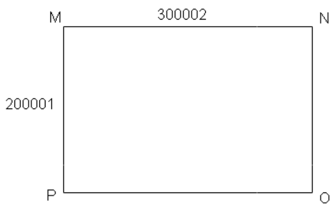
III.2. Une introduction de la double distributivité moyennant la calculatrice.

Dans cette activité, l'unité de longueur est le millimètre.

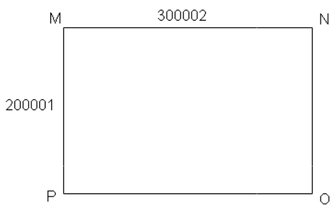
1) À l'aide de la calculatrice, calculer l'aire des rectangles ABCD, EFGH et IJKL.

<table>
<tr><td></td><td>Aire</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

2) a) En observant le tableau précédent, deviner l'aire du rectangle MNOP.

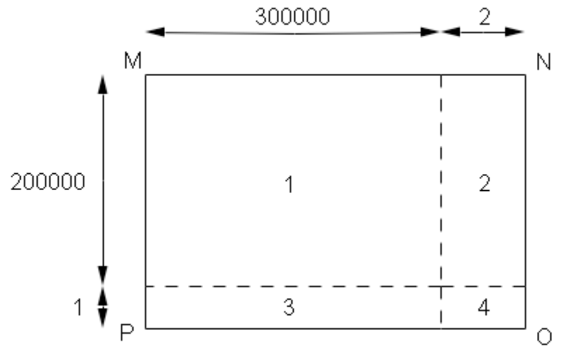
<table>
<tr><td></td><td>Aire</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

b) À l'aide de la calculatrice cette fois, calculer l'aire du rectangle MNOP.

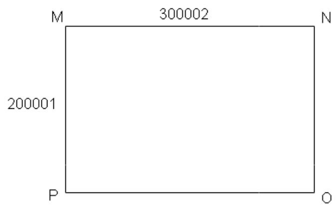
<table>
<tr><td></td><td>Aire</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Affichage de la calculatrice :

Ecriture décimale :</td></tr>
</table>

3) Pour connaître l’aire du rectangle MNOP, on le découpe en quatre rectangles :



a) Calculer l’aire des rectangles 1, 2, 3 et 4 et en déduire celle du rectangle MNOP.

	Aire
1	
2	
3	
4	
	

b) Expliquer le résultat de la question 2) b).

4) Revenons sur le calcul :

Si A désigne l’aire du rectangle MNOP, on a :

$A = 200001 \times 300002$

$A = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots)$

$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots \times \ldots$

Objectifs :

- Susciter une réflexion, une interrogation grâce à la calculatrice.
- Proposer une réponse à cette interrogation.
- Organiser cette réponse et introduire la notion de double distributivité.

Déroulement de la séance :

Pour commencer, je tiens à signaler que mes élèves ont tous participés activement à cette activité, implication que j'avais déjà pu remarquer lors d'une séance en salle informatique. L'intégration des technologies informatiques a alors peut être aussi un rôle à jouer auprès des élèves qui rencontrent certaines difficultés et qui ne s'investissent pas toujours assez dans le travail qu'on leur propose. En effet, pour certains, une fiabilité insuffisante du calcul écrit est un véritable handicap et, même si on reconnaît l'importance du développement de compétences de calcul, il me semble qu'un calcul peu sûr ne devrait pas constituer un blocage à toute activité mathématique (une orthographe incertaine n'interdit pas d'écrire). Dans ces conditions, un calcul assisté, même dans des cas que l'on voudrait voir maîtrisés sans machine, peut être le moyen de permettre à certains un travail mathématique et des apprentissages qui seraient impossible sans assistance.

Je vais maintenant décrire le déroulement de la séance en précisant ici que cette activité a duré 30 minutes et qu'elle a donné lieu à une trace écrite sur laquelle je reviendrai.

Comme je l'avais imaginé, la question 1) n'a posé aucun problème, quant à la question 2) a), elle ne les a pas non plus perturbés. En revanche, la question 2) b) a générée quelques erreurs. Certains n'ont pas su traduire l'affichage de la calculatrice quand d'autres ont traduit l'affichage $\boxed{6.00007E+10}$ par le nombre 60000700002 pour être cohérent avec la question précédente. Ces derniers ont réagi implicitement en fonction du contrat didactique habituel d'après lequel toute situation proposée par le professeur doit être cohérente. En tout cas, cette question a été l'occasion de revoir la lecture des grands nombres, leur écriture scientifique ainsi que l'affichage des puissances de dix à la calculatrice.

En ce qui concerne la suite, ils n'ont pas rencontré de réelles difficultés sauf dans la rédaction de l'explication demandée à la question 3)b) sur laquelle je reviendrai également. Mais peut-être ont-ils été trop guidés ?

Description et analyse des réponses données pour expliquer l'incohérence de la calculatrice :

- Cinq élèves n'ont apporté aucune explication.

On peut penser qu'il s'agit là de leur première confrontation avec les limites de la calculatrice.

- Quatre élèves ont émis l'idée que la calculatrice avait arrondi puisqu'elle manquait de place malgré l'utilisation des puissances de dix.

Ces élèves ont déjà une bonne vision de la calculatrice, de ses possibilités (utilisation des puissances de dix) mais aussi de ses limites (manque de place). Ils font parfaitement la distinction entre calcul exact et calcul approché et maîtrisent l'affichage de la calculatrice ainsi que les écritures décimale et scientifique des grands nombres.

- Un élève a expliqué que la calculatrice avait utilisé les puissances de dix puisqu'elle manquait de place.

Cet élève n'a pas compris le sens de la question, il n'a peut-être même pas saisi le problème que la calculatrice posait.

- Dix élèves ont exprimé le fait que la calculatrice n'était pas assez précise sans plus de détail.

La majorité des élèves perçoit le problème mais ne fournit réellement aucune explication. Ceci révèle que l'instrumentation du calcul ne va pas de soi et que par conséquent, il faut bien prendre en compte toutes les compétences nouvelles qu'elle requiert afin de les inscrire sérieusement dans les objectifs des programmes.

- Un élève a détaillé que la calculatrice n'étant pas précise au 10 milliard près, elle arrondissait et supprimait le « 2 ».

Cet élève a compris, j'en suis convaincu, mais sa rédaction reste bien maladroite.

- Un élève a avoué que la calculette ne calculait pas les unités dans un grand nombre.

L'idée est là mais bien cachée.

- Un élève a décrété que le « 2 » n'était pas nécessaire.

Cet élève a une confiance aveugle en sa calculatrice. Il n'oserait jamais imaginer qu'elle puisse avoir tort et lui raison. Cette conviction existe chez les élèves qui utilisent leur calculatrice comme une « béquille » et non comme un « instrument ». Je rappelle ici que l'intégration des outils de calcul dans l'enseignement nécessite la prise en compte de ce danger, impose de varier les situations de travail et ne doit surtout pas se confondre avec la mise à disposition permanente des outils de calcul.

- Un élève a assuré que le découpage fournissait un résultat plus précis.

Peut-être que $(200000+1)(300000+2)$ est plus précis que 200001×300002 ?

- Un élève a trouvé que la calculatrice n'avait pas deviné le résultat parce qu'elle n'avait pas calculé.

Quelle est cette calculatrice qui ne calcule pas pour deviner le résultat ?

- Un élève a noté que la calculatrice avait tout fait d'un coup sans réfléchir et tout multiplier d'un coup.

Quelle idée a-t-elle eue cette calculatrice de tout faire d'un coup sans réfléchir ?

Trace écrite suivant cette activité :

Propriété : Si a, b, c et d désignent des nombres relatifs, on a :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Preuve : On sait que $(a+b)k = ak + bk$.
Donc, en remplaçant k par (c+d), l'égalité devient :
$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$
$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Exemples : $A = (x+3)(x+4)$
$A = x^2 + 4x + 3X + 12$
$A = x^2 + 7X + 12$

$B = (y-5)(2+y)$
$B = (y+(-5))(2+y)$
$B = 2y + y^2 - 10 - 5y$
$B = y^2 - 3y - 10$

La propriété, sa preuve et les deux exemples ayant été écrits à l'aide de la classe.

III.3. Une recherche dans un univers instrumenté.

A l'aide de la calculatrice :

1) Comparer $\frac{2003}{2004}$ et $\frac{2004}{2005}$.

2) Comparer $\frac{200003}{200004}$ et $\frac{200004}{200005}$.

3) Comparer $\frac{200000003}{200000004}$ et $\frac{200000004}{200000005}$.

Solution détaillée de cette recherche :

1) La calculatrice fournit :

$$2003 \div 2004 \simeq 0{,}999500998$$
$$2004 \div 2005 \simeq 0{,}999501247$$

On peut donc conclure.

2) La calculatrice fournit :

$$200003 \div 200004 \simeq 0{,}999995$$
$$200004 \div 200005 \simeq 0{,}999995$$

On ne peut donc pas conclure directement.

L'idée est alors d'étudier le signe de $\frac{200004}{200005} - \frac{200003}{200004}$.

La calculatrice fournit :

$$(200004 \div 200005) - (200003 \div 200004) = 2{,}5 \times 10^{-11}$$

On peut donc conclure.

3) La calculatrice fournit :

$$200000003 \div 200000004 \simeq 0{,}999999995$$
$$200000004 \div 200000005 \simeq 0{,}999999995$$

On ne peut donc pas conclure directement.

L'idée est encore d'étudier le signe de $\dfrac{200000004}{200000005} - \dfrac{200000003}{200000004}$.

Mais cette fois la calculatrice fournit :

$$(200000004 \div 200000005) - (200000003 \div 200000004) = 0$$

On doit donc s'y prendre autrement.

Pour s'en sortir on va soustraire les deux fractions ce qui donne :

$$\frac{200000004}{200000005} - \frac{200000003}{200000004} = \frac{200000004^2 - 200000003 \times 200000005}{200000005 \times 200000004}$$

Maintenant, deux possibilités s'offrent à nous, soit on remarque que le numérateur est de la forme $x^2 - (x-1)(x+1) = 1$, soit on calcule mais dans ce cas, il faut faire très attention car la calculatrice fournit :

$$200000004^2 \simeq 4{,}00000016 \times 10^{16}$$
$$200000003 \times 200000005 \simeq 4{,}00000016 \times 10^{16}$$

Ceci n'étant pas satisfaisant, on va décomposer les nombres et utiliser la « double distributivité » ce qui donne :

$$\begin{aligned} 200000004^2 &= (2\times 10^8 + 4)(2\times 10^8 + 4) \\ &= 4\times 10^{16} + 8\times 10^8 + 8\times 10^8 + 16 \\ &= 4\times 10^{16} + 16\times 10^8 + 16 \\ &= 40000001600000016 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 200000003 \times 200000005 &= (2\times 10^8 + 3)(2\times 10^8 + 5) \\ &= 4\times 10^{16} + 10\times 10^8 + 6\times 10^8 + 15 \\ &= 4\times 10^{16} + 16\times 10^8 + 15 \\ &= 40000001600000015 \end{aligned}$$

On retrouve bien que le numérateur vaut 1.

Ce que l'on peut attendre d'une telle recherche :

D'abord, il est bien évident qu'une telle activité doit être réalisée en classe pour éviter les blocages complets et par groupes pour faciliter la recherche.Tâchons maintenant de décrire ce qui peut se passer lors d'une telle séance.

La première comparaison ne devrait pas poser de problème mais la deuxième sera source des premières difficultés. En effet, au vu de l'affichage de la calculatrice, les élèves penseront sûrement que les fractions sont égales. Ceci doit alors être l'occasion de leur faire calculer la différence $\frac{200004}{200005}-\frac{200003}{200004}$ pour qu'ils constatent qu'elle n'est pas égale à zéro et donc que les fractions ne sont pas égales. On les amène ici à utiliser une propriété du cours de 4ème qui fait le lien entre la comparaison et le signe de la différence, propriété qui est d'ailleurs la clé de cette question. Notons cependant que seuls ceux qui calculent cette différence « d'un coup » ou en utilisant le « ans » trouveront le résultat correct. Ceci doit, cette fois, être l'occasion de leur expliquer comment fonctionne leur calculatrice autrement dit ce qu'elle affiche mais aussi ce qu'elle garde en mémoire sans oublier l'ordre dans lequel elle opère.

En ce qui concerne la troisième comparaison, j'espère que personne n'affirmera que les fractions sont égales puisque l'affichage est le même, mais je pense que certains prétendront quand même qu'elles sont égales puisque la différence $\frac{200000004}{200000005}-\frac{200000003}{200000004}$ est égale à zéro. Ce sera alors l'occasion de leur expliquer à nouveau ce qu'affiche la calculatrice. Ensuite, on s'appuiera encore sur la propriété faisant le lien entre la comparaison et le signe de la différence mais ici ce signe ne sera pas fourni d'emblée par la calculatrice et donc les élèves devront s'adapter ce qui provoquera sûrement un nouveau blocage. Il faudra alors les inciter à soustraire les deux fractions ce qui posera un nouveau problème, le calcul du numérateur :

$$200000004^2 - 200000003 \times 200000005$$

Ce problème aura été traité en dehors de ce contexte de deux manières différentes, d'une part, en application de la double distributivité, et d'autre part, comme utilisation du calcul algébrique. On peut alors espérer que certains arriveront à réinvestir spontanément ce travail pour conclure.

Finalement, cette recherche dans un univers instrumenté par la calculatrice m'apparaît comme étant l'occasion de faire le point avec les élèves sur la connaissance qu'ils ont de leur calculatrice mais aussi de leur faire remarquer que si elle peut s'avérer très utile dans certaines situations, la calculatrice possède malgré tout des limites dont il faut avoir bien conscience pour ne pas commettre d'erreur. Par ailleurs, il me semble que cette recherche constitue un lieu privilégié pour mettre en application plusieurs résultats du programme de 4ème à savoir la propriété faisant le lien entre la comparaison et le signe de la différence mais aussi la soustraction de deux fractions sans oublier la double distributivité sur des exemples numériques ou encore le calcul algébrique au service du calcul numérique.

Conclusion

L'enseignement du calcul est aujourd'hui profondément déstabilisé par l'évolution technologique, les rapports inadéquats entre calcul et raisonnement, le manque de complémentarité entre calcul exact et calcul approché mais aussi la péjoration du travail technique au profit du travail conceptuel.
Une revalorisation du calcul est alors indispensable et nécessite d'intégrer les outils de calcul dans l'enseignement pour éviter les positions caricaturales, de penser le calcul pour ne pas le réduire à sa part mécanisée mais aussi de mettre en valeur le calcul approché pour, par exemple, bien préparer l'analyse.
L'expérience présentée révèle quant à elle des élèves en réussite qui considèrent la calculatrice comme un objet tabou en mathématiques mais aussi des élèves en difficultés qui eux l'utilisent comme une « béquille » sans oublier une mauvaise maîtrise de la calculatrice pour une large part des élèves. En réalité, ces comportements sont le fruit d'une intégration mal menée des outils de calcul dans l'enseignement. Il est pourtant possible, par exemple, d'intégrer la calculatrice en 4ème afin d'introduire de nouveaux concepts ou encore dans le cadre d'une recherche permettant par ailleurs de réinvestir des connaissances acquises au préalable.

Malheureusement, les valeurs de l'enseignement des mathématiques restent, malgré les incitations diverses et répétées à intégrer de nouveaux outils, celles associées à l'environnement de travail traditionnel. Elles sont perçues comme des sortes d'absolus, sont peu questionnées par l'institution et ses acteurs et l'on voit dans la technologie un simple adjuvant pédagogique. C'est, me semble-t-il, une erreur aux conséquences regrettables car elle rend particulièrement difficile de penser les besoins mathématiques et techniques du calcul instrumenté et la façon de satisfaire ces besoins dans l'enseignement.
Mais il ne faut surtout pas oublier que ce monde du calcul est un monde noble et d'une richesse inépuisable, que c'est la rencontre avec ce monde fabuleux qu'il nous faut savoir organiser pour nos élèves, car mathématiques et calcul sont indissociables.